Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 17. 3. 2014

1. (a) Zeigen Sie

$$D(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) = D(\dots, a_i, \dots, a_j + \lambda a_i, \dots)$$

unter Verwendung von (D1) — (D4).

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Teil (a): Addiert man zu einer Zeile j ein Vielfaches einer anderen Zeile i, so ändert sich die Determinante der betroffenen Matrix nicht.

2. (a) Berechnen Sie $\det(A)$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5$, indem Sie A durch Zeilenoperationen auf eine obere Dreiecksmatrix umformen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Ist A über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar? Berechnen Sie in diesem Fall auch $\det(A^{-1})$.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei U_n jene $n \times n$-Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$tU_n + I_n = \begin{pmatrix} t+1 & t & \cdots & t \\ t & t+1 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & t & \cdots & t+1 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

4. Zeigen Sie unter Verwendung von Definition 8.1:

(a) Ist v ein Eigenvektor einer Matrix A zu einem Eigenwert λ, so ist v auch ein Eigenvektor der Matrix A^2 zum Eigenwert λ^2.

(b) Ist v ein Eigenvektor einer invertierbaren Matrix A zu einem Eigenwert λ, so ist $\lambda \neq 0$, und v ist auch ein Eigenvektor ihrer Inversen A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

5. Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und sei $\lambda \in K$. Zeigen Sie Satz 8.2: $\det(A - \lambda I_n) = 0$ genau dann wenn $\exists v \in K^n \setminus \{0\} : \; A \cdot v = \lambda v$.

6. (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A über dem Körper $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Bestimmen Sie jeweils den zugehörigen Eigenraum.

7. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte (samt ihren algebraischen Vielfachheiten) der Matrix A.

   (b) Ebenso für die Matrix $T \cdot A \cdot T^{-1}$.

   (c) Berechnen Sie eine Basis des Eigenraumes $E_{A,\lambda}$ und bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit von λ für jeden Eigenwert λ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. (a) Zeigen Sie, dass -1 und 1 Eigenwerte von A sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; x \mapsto A \cdot x$ ist die Spiegelung an einer Ebene. An welcher?