Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
3. Übungsblatt für den 24. März 2014

1. (a) Seien
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Sei weiters h eine lineare Abbildung, sodass
$$\begin{aligned} h(b_1) &= 2b_1 \\ h(b_2) &= -b_2 \\ h(b_3) &= -b_3 \end{aligned}$$
Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvekoren und Eigenräume von h sowie die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3). Ist h diagonalisierbar?

   (b) Dasselbe für den Fall, dass statt $h(b_3) = -b_3$ gilt:
$$h(b_3) = b_2 - b_3.$$

2. Sei B eine geordnete Basis eines endlichdimensonalen Vektorraums V, und $h : V \to V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:
   (a) h ist diagonalisierbar;
   (b) Die Abbildungsmatrix von h ist diagonalisierbar;
   (c) Für jede Basis C von V ist die Abbildungsmatrix von h bezüglich C diagonalisierbar.

3. Zeigen oder widerlegen Sie:
   (a) Eine Matrix über den reellen Zahlen ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie als Matrix über den komplexen Zahlen betrachtet diagonalisierbar ist.
   (b) Die Determinante einer diagionalisierbaren Matrix über den komplexen Zahlen stimmt mit dem Produkt ihrer Eigenwerte (mit algebraischen Vielfachheiten) überein.

4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Eigenwerte (mit Vielfachheiten), Eigenvektoren, und Eigenräume von A, A^2, A^3. Welche davon sind diagonalisierbar?

5. Sei p ein Polynom, und M eine quadratische Matrix. Sei λ ein Eigenwert von M. Zeigen Sie: $p(\lambda)$ ist ein Eigenwert von $p(M)$.

6. Sind die folgenden Matrizen A, B über den komplexen Zahlen diagonalisierbar?

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Existiert eine reguläre Matrix C mit $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$?

7. Berechnen Sie näherungsweise

$$\begin{pmatrix} -7/2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{100}.$$

(Hinweis: *Diagonalisieren.*)

8. Die Ebene E sei gegeben durch die Punkte $(3,4,5)$, $(2,2,2)$, $(2,3,5)$.

   (a) Sei h die Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in sich, die jeden Vektor auf sein Spiegelbild an der Ebene E abbildet. Erläutern Sie geometrisch, warum diese linear ist?

   (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von h.

   (c) Dasselbe für die Abbildung p, welche jeden Punkt in die x-y-Ebene projiziert, also $p(x,y,z) = (x,y,0)$.