Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
4. Übungsblatt für den 31. 3. 2014

1. Lösen Sie das folgende System von Differentialgleichungen.

$$v'(t) = -v(t) + 3w(t)$$
$$w'(t) = 3v(t) - w(t)$$

2. Finden Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Finden Sie 3×3-Matrizen A, B und C mit $m_A(x) = (x-1)$, $m_B(x) = (x-1)^2$ und $m_C(x) = (x-1)^3$.

4. Invertieren Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen mit Hilfe des Satzes von Cayley Hamilton.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Zeigen Sie, dass $\langle p(t), q(t) \rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\sqrt{1-t^2}dt$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der Polynome in t vom Grad kleiner gleich n ist. Zeigen Sie weiters, dass die Polynome $u_2(t) = 4t^2 - 1$, $u_3(t) = 8t^3 - 4t$ und $u_4(t) = 2tu_3(t) - u_2(t)$ paarweise orthogonal sind. Sind u_2 und u_3 orthonormal?

6. Sei V ein beliebiger Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Zeigen, oder wiederlegen Sie
   (a) $\forall v, w \in V : \|v\| = \|w\| \Longrightarrow v = w$
   (b) $\forall v, w \in V : \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$
   (c) $\forall v, w \in V : \|v - w\| \leq \|v\| - \|w\|$
   (d) $\forall v, w \in V : d(w, v) = 0 \Leftrightarrow w = v$

7. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren um aus der Basis $((0,1,2),(0,1,1,),(1,1,1))$ eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

8. Sei V der Vektorraum der Polynome in t vom Grad kleiner gleich 3. Dann ist $\langle p(t), q(t) \rangle := \int_a^b p(t)q(t)dt$ ein inneres Produkt auf V. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis aus der Basis $B = (1, t, 2t^2 - 1)$.