Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
5. Übungsblatt für den 28. 04. 2014

1. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Zeigen Sie
$$|\langle x \,|\, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \forall x, y \in V.$$

2. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $x_1, \ldots, x_n \in V$. Betrachten Sie die $n \times n$-Matrix
$$G = \big(\langle x_i \,|\, x_j\rangle\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$
Ihre Determinante $g := \det G$ heißt `Gramsche Determinante`. Zeigen Sie:
$$\begin{array}{lcl} g \geq 0 & & \\ g = 0 & \iff & x_1, \ldots, x_n \text{ linear abhängig.} \end{array}$$

3. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) der Dimension $n < \infty$. Zeigen Sie:
   (a) $\forall v \in V$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x \,|\, v\rangle$ ein lineares Funktional (i.e. eine lineare Abbildung von V in den Grundkörper) d.h. ein Element von $V^\star$.
   (b) Für jedes lineare Funktional $\alpha \in V^\star$ gibt es genau ein $v \in V$ sodass
   $$\forall x \in V: \ \alpha(x) = \langle x \,|\, v\rangle.$$
   `Anleitung`: Ergänzen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von $\ker(\alpha)$ zu einer Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \cup \{b_n\}$ von V und setzen Sie $v := \overline{\alpha(b_n)}\, b_n$.

4. Fortsetzung von Beispiel 3.
   (a) Nach 3 (b) ist die Abbildung $s\colon V \longrightarrow V^\star$, $v \mapsto (x \mapsto \langle x \,|\, v\rangle)$, also
   $$s_v(x) = \langle x \,|\, v\rangle$$
   bijektiv. Zeigen Sie, dass
   $$\begin{array}{rcl} s_{v+w} & = & s_v + s_w \quad \forall v, w \in V; \\ s_{\lambda v} & = & \overline{\lambda} s_v \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \ \forall v \in V. \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\langle s_v \,|\, s_w \rangle := \langle w \,|\, v \rangle$ ein inneres Produkt auf $V^\star$ definiert.

5. Es sei V ein reeller innerer Produktraum. Zeigen Sie:

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x \,|\, y \rangle \tag{1}$$

6. Ist V ein komplexer innerer Produktraum, dann gilt für alle $x, y \in V$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\langle x \,|\, y \rangle. \tag{2}$$

Zeigen Sie diese Identität.

7. Sei V ein reeller normierter Vektorraum. Zeigen Sie:

Die Norm von V ist von einem Skalarprodukt auf V induziert genau dann, wenn für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3}$$

`Anmerkung`: Dass die von einem Skalarprodukt induzierte Norm die Identität (3) erfüllt, rechnet man direkt nach. Für die konverse Implikation verwenden Sie die Identität (1) um ein binäres Produkt $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x \,|\, y \rangle$ zu definieren. Zeigen Sie, dass es die Axiome eines Skalarproduktes (Definition 9.1) erfüllt und dass die von f induzierte Norm die ursprünglich gegebene ist.

`Anleitung`: Zeigen Sie zuerst die Identitäten 9.1.(3), 9.1.(4) und die Gleichung $\langle x \,|\, x \rangle = \|x\|^2$. Für die (nicht offensichtlichen) Identitäten 9.1.(1) und 9.1.(2) können Sie wie folgt vorgehen:

(a) Beweisen Sie mit Hilfe von (3), dass für beliebige $a, b, x, y \in V$ gilt

$$2\big(\langle a \,|\, b \rangle + \langle x \,|\, y \rangle\big) = \langle a + x \,|\, b + y \rangle + \langle a - x \,|\, b - y \rangle. \tag{4}$$

(b) Verwenden Sie die letzte Identität zur Ableitung der Formel

$$\langle 2x \,|\, y \rangle = 2\langle x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, 2y \rangle \tag{5}$$

(c) Mit Hilfe von (4) und (5) folgt dann unmittelbar 9.1.(1).

(d) Sie wissen jetzt, dass f additiv und symmetrische ist, es gilt somit auch

$$\langle -x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, -y \rangle = -\langle x \,|\, y \rangle. \tag{6}$$

Mit Induktion zeigen Sie

$$\langle nx \,|\, y \rangle = n\langle x \,|\, y \rangle \ \forall n \in \mathbb{N}$$

und mit (6) dann sofort, dass diese Gleichung für all $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

(e) Indem Sie eine rationale Zahl $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus 0$ als $\lambda = \frac{r}{s}$ schreiben, erkennen Sie aus dem Vorigen direkt, dass

$$\langle \lambda x \,|\, y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle \ \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

(f) Verwenden Sie ein Stetigkeitsargument um zu erkennen, dass die letzte Identität für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Aussage von Beispiel 7. gilt auch für komplexe normierte Räume. Sie können z.B. die Polarisierungsidentität (2) aus Beispiel 6. verwenden, um in diesem Fall ein Skalarprodukt zu definieren. Danach funktioniert die Sequenz der Beweisschritte analog (aber aufwendiger) zu vorliegender Anleitung.

8. Es sei $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ein Vektorraumisomorphismus auf dem IP-Raum V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) $\langle h(v) \,|\, h(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \ \forall v, w \in V$.

   (b) Für alle Orthonormalbasen B von V ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{A}(h, B, B)$ orthogonal.