

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
6. Übungsblatt für den 5. Mai 2014**

1. Es sei $U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Liegt v in U ? Bestimmen Sie jenen Vektor in U , der v am nächsten liegt.
2. Wir betrachten die folgenden Teilräume des Raums der stetigen Funktionen auf den Einheitsintervall, mit dem Integral als Skalarprodukt (vgl. Beispiel 9.18(b)). Es sei, für $n \in \mathbb{N}$, U_n der Raum aller Polynome höchstens n -ten Grades. Bestimmen Sie, für $n \in \{0, 1, 2\}$ jenes Polynom in U_n , welches den minimalen Abstand zu e^x hat
3. Verwenden Sie das Skalarprodukt aus Beispiel 2. Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Funktionen x, x^2, e^x .

4. (a) Sei $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (mit dem kanonischen Skalarprodukt). Bestimmen Sie Basen $E^\perp, (E^\perp)^\perp, ((E^\perp)^\perp)^\perp, (((E^\perp)^\perp)^\perp)^\perp, \dots$ sowie \emptyset^\perp und $(\emptyset^\perp)^\perp$.
(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede Teilmenge E eines Vektorraums gilt

$$E^\perp = \text{span}(E)^\perp.$$

5. Es sei $U_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $U_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
6. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die durch

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit ist.

7. Verwenden Sie die Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

um gemäß Satz 10.10 eine Basis von $\text{Mult}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3)$ zu konstruieren, und bestimmen Sie, die multilineare Abbildung f , welche bezüglich dieser Basis die Koordinaten $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ hat. Es reicht, wenn Sie $f(x, y)$ an zumindest so vielen Stellen bestimmen, dass f damit eindeutig festgelegt ist.

8. Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0.362 & 0.932 \\ -0.932 & 0.362 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -0.505 & 0.683 \\ -0.683 & -0.505 \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrizen?