Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
8. Übungsblatt für den 19. 05. 2014

1. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal sind.

2. Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K und $f\colon V \times W \longrightarrow K$ eine Bilinearform. A sei die Darstellungsmatrix von f bezüglicher der Basen B von V und C von W. Sei A' die Darstellungsmatrix von f bezüglich weiterer Basen B' von V und C' von W. Zeigen Sie, dass A und A' äquivalente Matrizen sind.

3. Es sei $\dim V = n < \infty$, $f\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, $v \in V$ ein Vektor mit $f(v, v) \neq 0$. Zeigen Sie, dass
$$V = \mathrm{span}(v) \oplus \{v\}^{\perp}$$
wobei das ‘orthogonale Komplement’ von $S \subseteq V$ bezüglich f gegeben ist als
$$S^{\perp} = \{x \in V \mid f(x, s) = 0\ \forall s \in S\}.$$

4. Berechnen Sie das Maximum der Abbildung
$$q\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
wobei
$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$
die Sphäre mit Radius 1 im $\mathbb{R}^3$ ist. Berechnen Sie weiters jene Stellen, an den das Maximum angenommen wird.

5. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, $p \in K[x]$ ein Polynom und $f\colon V \longrightarrow V$ linear. Zeigen Sie, dass $p(f)\colon V \longrightarrow V$ linear ist.

6. Sei $f\colon V \longrightarrow V$ linear über K und $W \subseteq V$ ein f-invarianter Teilraum. Zeigen Sie
$$\forall p \in K[x] : p(f)(W) \subseteq W.$$

7. Es sei V ein Vektorraum über K und $f\colon V \longrightarrow V$ linear. Weiters seien $p, q \in K[x]$ Polynome. Es bezeichne GGT den größten gemeinsamen Teiler und KGV das kleinste gemeinsame Vielfache. Zeigen Sie
   (a) $\ker\big(\mathrm{GGT}(p, q)(f)\big) = \ker(p(f)) \cap \ker(q(f))$;
   (b) $\ker\big(\mathrm{KGV}(p, q)(f)\big) = \ker(p(f)) + \ker(q(f))$.

8. Seien $p_1, \dots, p_r \in K[x]$ paarweise teilerfremde Polynome und $f\colon V \longrightarrow V$ linear. Zeigen Sie
$$\ker\big((p_1 \cdots p_r)(f)\big) = \ker(p_1(f)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_r(f)).$$