8. Übungsblatt, Lösungsvorschläge Ex 2., Ex 7., Ex 8.

Ex 2. $A' = P^T AQ$, wobei P und Q die entsprechenden Basiswechselmatrizen sind.

Seien $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ und $B' = \{b'_1, \ldots, b'_m\}$ Basen von V; weiters $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ und $C' = \{c'_1, \ldots, c_n{}'\}$ Basen von W.

$$\begin{aligned} A'_{i,j} &= f(b'_i, c'_j) = f\Big(\sum_{k=1}^{m} P_{k,i} b_k, \sum_{l=1}^{n} Q_{l,j} c_j\Big) = \sum_k \sum_l P_{k,i} Q_{l,j} \cdot f(b_k, c_l) \\ &= \sum_{k,l} (P)^T_{i,k} A_{k,l} Q_{l,j} = \sum_k (P^T)_{i,k} \sum_l A_{k,l} Q_{l,j} = \sum_k (P^T)_{i,k} (AQ)_{k,j} \\ &= (P^T AQ)_{i,j} \end{aligned}$$

Ex 7. Sei $d := \mathrm{GGT}(p, q)$ und $c := \mathrm{KGV}(p, q)$. Wir zeigen zuerst:

> Falls ein Polynom a ein Polynom b teilt, also $a|b$, dann gilt $\ker(a(f)) \subseteq \ker(b(f))$.

$b = r \cdot a$ für ein $r \in K[x]$, und somit $b(f) = r(f) \circ a(f)$. Sei $v \in \ker(a(f))$, also $a(f)(v) = 0$. Dann ist $b(f)(v) = (r(f) \circ a(f))(v) = r(f)(a(f)(v)) = r(f)(0) = 0$ und somit $v \in \ker(b(f))$.

Mit dieser Einsicht ist für (a) und (b) jeweils eine Inklusionsrichtung klar:

$$\begin{array}{ll} \ker(d(f)) \subseteq \ker(p(f)) \cap \ker(q(f)) & \text{weil } d|p \text{ und } d|q \\ \ker(c(f)) \supseteq \ker(p(f)) + \ker(q(f)) & \text{weil } p|c \text{ und } q|c. \end{array}$$

Nun ist $d = rp + sq$, also $d(f) = r(f) \circ p(f) + s(f) \circ q(f)$. Das zeigt die 2. Inklusion von (a).

Zur 2. Inklusion von (b):

Es gibt teilerfremde Polynome $a, b \in K[x]$ mit $c = a \cdot p = b \cdot q$ und somit gilt $c(f) = a(f) \circ p(f) = b(f) \circ q(f)$. Weil a, b teilerfremd sind gibt es $r, s \in K[x]$ sodass gilt

$$1 = r \cdot a + s \cdot b \text{ und somit auch } \mathrm{id} = r(f) \circ a(f) + s(f) \circ b(f).$$

Mittels dieser Darstellung der identischen Abbildung als Summe können wir jeden Vektor v schreiben als $v = (r(f) \circ a(f))(v) + (s(f) \circ b(f))(v)$.

Sei nun $v \in \ker(c(f))$. Dann ist $(a(f) \circ p(f))(v) = 0$, also gilt

$$p(f)\Big((r(f) \circ a(f))(v)\Big) = (r(f) \circ a(f) \circ p(f))(v) = 0.$$

Das zeigt, dass für so ein v der Summand $(r(f) \circ a(f))(v) \in \ker(p(f))$.

Genauso sieht man, dass $(s(f) \circ b(f))(v) \in \ker(q(f))$. Damit gilt $v \in \ker(p(f)) + \ker(q(f))$.

Ex 8. Für $r = 2$ folgt aus der Voraussetzung der Teilerfremdheit, dass

$$p_1 \cdot p_2 = \mathrm{KGV}(p_1, p_2) \text{ und } 1 = \mathrm{GGT}(p_1, p_2)$$

und somit ist Beispiel 7 anwendbar. Der allgemeine Fall ($r \geq 2$) folgt leicht mittels Induktion.