Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
9. Übungsblatt für den 26. Mai 2014

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \mathbb{R}_5 \to \mathbb{R}_5$ die durch A induzierte lineare Abbildung ($h(x) = Ax$).

1. Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Testen Sie, ob $\operatorname{span}(u)$ ein h-invarianter Unterraum ist.

   (b) Finden Sie eine Basis B des kleinsten h-invarianten Unterraums, der $\operatorname{span}(u)$ umfasst.

2. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von h bezüglich einer Basis, welche die Basis B aus dem vorigen Beispiel erweitert.

3. Sei h wie zuvor, und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Basis des kleinsten v enthaltenden h-invarianten Unterraums.

4. Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}_5$, sodass die Abbildungsmatrix von h Blockdiagonalform hat.

5. Bestimmen Sie die Primärdekomposition von

   (a) $h\colon \mathbb{R}_5 \to \mathbb{R}_5$

   (b) $h\colon \mathbb{C}_5 \to \mathbb{C}_5$

   jeweils mit $h(x) = Ax$, wie in den Beispielen zuvor.

6. Gegeben seien die beiden Matrizen
$$X = \begin{pmatrix} 17 & -18 \\ 9 & -10 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 65 & -66 \\ 33 & -34 \end{pmatrix}.$$
   Testen Sie, ob X und Y simultan diagonalisierbar sind, und bestimmen Sie entsprechend eine Matrix P, sodass sowohl $P^{-1}XP$ als auch $P^{-1}YP$ eine Diagonalmatrix ist.

7. Bestimmen Sie die Jordan-Dekomposition der Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Wir betrachten die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   bzw. die Abbildung $h : \mathbb{R}_5 \to \mathbb{R}_5$, mit $h(v) := Av$, d.h. A ist die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Standardbasis. Bestimmen Sie

(a) die Eigenwerte von A und deren algebraische Vielfachheiten;

(b) die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten und Basen der entsprechenden Eigenräume, d.h. die Eigenvektoren;

(c) zu jedem Eigenwert, dessen geometrische Vielfachkeit kleiner ist als die algebraische, weitere Vektoren, welche diesen Vektor zu einer Basis eines invarianten Unterraums ergänzen.

(d) die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Basis, die aus den soeben bestimmten Basen der invarianten Unterräume zusammengesetzt ist;

(e) die Jordan-Dekomposition von A.