Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
10. Übungsblatt für den 2. 6. 2014

1. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A bezüglich der kanonischen Basis. Berechnen Sie die Jordan-Matrix und die zu f gehörende Jordan-Basis.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie den Lösungsraum V der folgenden linearen Differentialgleichung.

$$-9f(t) - 24f'(t) - 13f''(t) + 16f^{(3)}(t) + 21f^{(4)}(t) + 8f^{(5)}(t) + f^{(6)}(t) = 0$$

3. Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft $A^2 = A$. Sei J die zu A gehörende Jordan-Matrix.
   - Zeigen Sie, dass dann $J^2 = J$.
   - Zeigen Sie, dass für jeden Jordan-Block J_k in J gilt, dass $J_k^2 = J_k$.
   - Zeigen Sie, dass für alle k die Größe von J_k gleich 1 ist.
   - Welche möglichen Eigenwerte hat die Matrix A?

4. Gegeben sei das folgende System linearer Differentialgleichungen. Bestimmen Sie den allgemeinen Lösungsvektor.

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ x_2' &= 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

5. Sei A eine (8×8)-Matrix über $\mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:
   - $c_A(x) = (x+2)^8$
   - $m_A(x) = (x+2)$
   - $\dim(\mathrm{kern}(A + 2I)) = 4$

   Welche Möglichkeiten gibt es für die Anzahl und Größen der Blöcke in der Jordan-Normalform von A? Geben Sie eine Begründung dafür an.

6. Sind die folgenden Matrizen nilpotent?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -13 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Eine reguläre Matrix ist nicht nilpotent.

   (b) Finden Sie eine Matrix, die nicht regulär und nicht nilpotent ist.

8. (a) Sei J eine elementare Jordan-Matrix. Berechnen Sie J^n für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Zerlegen Sie $J = \lambda I + B$. Zeigen Sie, dass B nilpotent ist und verwenden Sie die binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

   (b) Berechnen Sie A^{10} für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Hinweis: Verwenden Sie (a).