Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
11. Übungsblatt für den 23. 06. 2014

1. Es sei M der von den Punkten $P_0, P_1, \dots, P_q \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte affine Teilraum

$$M = \{P_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (P_i - P_0) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}\}.$$

   Zeigen Sie:

   (a) M ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

   (b) Die konvexe Hülle der Punkte $P_0, \dots, P_q$, $\mathrm{KH}(P_0, \dots, P_q)$ ist Teilmenge von M.

2. Wir sagen, die Punkte $P_0, \dots P_q \in \mathbb{R}^n$ befinden sich in allgemeiner Lage, wenn die Vektoren $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_q - P_0$ linear unabhängig sind.

   Zeigen Sie:

   (a) Diese Definition ist unabhängig von der Sonderstellung des Punktes P_0.

   (b) Wenn sich $P_0, \dots, P_q$ in allgemeiner Lage befinden, dann hat jeder Punkt X des von $P_0, \dots, P_q$ aufgespannten affinen Teilraums eine eindeutige Darstellung

$$X = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i P_i \text{ mit } \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1.$$

   Die Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ heißen dann die `baryzentrischen Koordinaten` von X (bezüglich der Punkte $P_0, \dots, P_q$).

3. Es seien $P_0, \dots, P_q \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage, und $S = \mathrm{KH}(P_0, \dots, P_q)$. Zeigen Sie:

   Die Extremalpunkte von S (Definition 12.16) sind genau die Punkte $P_0, \dots, P_q$.

4. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten

   (a) des Punktes $(-7, 3, 10)$ bezüglich der Punkte

   $$P_0 = (1, 2, 3),\ P_1 = (2, 3, 1)\ P_2 = (3, 1, 2).$$

   (b) des Punktes $(1, 1, 1)$ bezüglich der Punkte

   $$P_0 = (1, 2, 3),\ P_1 = (2, 3, 1)\ P_2 = (3, 1, 2), P_3 = (2, 3, 5).$$

5. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten eines beliebigen Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Punkte

   $$P_0 = (1, 2, 3),\ P_1 = (2, 3, 1)\ P_2 = (3, 1, 2), P_3 = (2, 3, 5).$$

6. Beweisen Sie den folgenden Satz.

   Sind $S \subseteq \mathbb{R}^m$ und $T \subseteq \mathbb{R}^n$ beide konvex, so ist ihr Produkt $S \times T \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ konvex.

7. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind und bestimmen Sie die Extremalpunkte.

   (a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq 1 \wedge \cdots \wedge |x_n| \leq 1\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$.

8. Es sei $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix mit reellen Einträgen, und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des Systems linearer Ungleichungen $A \cdot x \leq b$, also des Systems

   $$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

   eine konvexe Menge ist.