Aufgabe 21. 1. Schreiben Sie ein Pascal-nahes Programm für einen Algorithmus, welcher das kleinste gemeinsame Vielfache zweier ganzer Zahlen berechnet.

2. Übersetzen Sie den Pseudocode aus Punkt 1 in ein äquivalentes RAM-Programm.

Aufgabe 22. Geben Sie eine konkrete Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$ an mit $\Sigma = \{0, 1\}$, für die $L(M) = \{1^k 0 1^{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\}$ gilt.
Zusatz: Suchen Sie im Internet nach Programmen, die Turingmaschinencode interpretieren und geben Sie die URL an.

Aufgabe 23. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$ eine Turingmaschine mit $Q = \{q_0, \dots, q_6\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $F = \{q_3\}$ und δ gegeben durch die folgende Tabelle.

M	0	1	$\sqcup$
q_0	$q_1 0 R$	$q_4 \sqcup R$	–
q_1	–	$q_2 1 R$	–
q_2	–	–	$q_3 \sqcup S$
q_3	–	–	–
q_4	$q_4 0 R$	$q_4 1 R$	$q_5 \sqcup L$
q_5	–	$p_6 \sqcup L$	–
q_6	$p_6 0 L$	$p_6 1 L$	$q_0 \sqcup R$

Bestimmen Sie $L(M)$.

Aufgabe 24. Eine Turingmaschine wurde definiert als ein 6-tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$$

wobei $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ und δ eine partielle Funktion $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ ist. Ein Produkt zweier Turingmaschinen $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, q_{1,0}, F_1, \delta_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, q_{2,0}, F_2, \delta_2)$ ist ein 6-tupel

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, (q_{1,0}, q_{2,0}), F, \delta_1 \times \delta_2)$$

mit $F \subseteq Q_1 \times Q_2$. Für Paare $(q_1, \gamma_1) \in Q_1 \times \Gamma_1$ und $(q_2, \gamma_2) \in Q_2 \times \Gamma_2$ im Definitionsbereich von δ_1 bzw δ_2 mit $\delta_i(q_i, \gamma_i) = (p_i, g_i, m_i)$ $(i = 1, 2)$ ist

$$\delta_1 \times \delta_2(q_1, q_2, \gamma_1, \gamma_2) = (p_1, p_2, g_1, g_2, m_1, m_2).$$

$M_1 \times M_2$ hat eine natürliche Interpretation als Turingmaschine mit zwei Bändern. Im Falle, dass $\Sigma_1 = \Sigma_2$, kann durch Modifikation der Überführungsfunktion $\delta_1 \times \delta_2$ und bei passender Wahl der Menge F der zu akzeptierenden Zustände, $M_1 \times M_2$ zum Erkennen boolescher Kombinationen von $L(M_1)$ und $L(M_2)$ verwendet werden.
In den folgenden Tabellen sind zwei Turingmaschinen M_1 und M_2 mit $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$ gegeben.

M_1	0	1	X	Y	$\sqcup$
p_0	$p_1 X R$	–	–	$p_3 Y R$	–
p_1	$p_1 0 R$	$p_2 Y L$	–	$p_1 Y R$	–
p_2	$p_2 0 L$	–	$p_0 X R$	$p_2 Y L$	–
p_3	–	–	–	$p_3 Y R$	$p_4 \sqcup R$
p_4	–	–	–	–	–

M_2	0	1	$\sqcup$
q_0	$q_1 0 R$	$q_2 1 R$	–
q_1	–	$q_2 1 R$	$q_3 \sqcup S$
q_2	$q_1 0 R$	–	$q_3 \sqcup S$
q_3	–	–	–

Die Endzustände von M_1 bzw. M_2 sind p_4 bzw q_3.

1. Beschreiben Sie die Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$.
2. Wie sind M_1 und M_2 zu M_1' und M_2' zu modifizieren und wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen, so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cap L(M_2)$ gilt.
3. Wie sind M_1 und M_2 zu M_1' und M_2' zu modifizieren und wie ist F für $M_1 \times M_2$ festzulegen, so dass $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cup L(M_2)$ gilt.

Aufgabe 25. Gegeben sei die Sprache $L = \{(ab^m)^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m, n > 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine explizite Beschreibung (Zustände, Überführungsfunktion) einer einbändigen Turingmaschine M, mit $L(M) = L$.