

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra und Analytische Geometrie I” (326006)
 2.2.2007

Bitte folgendes beachten:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
 - Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen – auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
 - Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.
 - Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.
-

- (1) (a) Geben Sie die Peano Axiome (P1) – (P5) für die natürlichen Zahlen \mathbb{N} an.
 (b) Die Addition auf \mathbb{N} ist definiert als:

$$n + 0 := n \quad \text{und} \\
n + S(m) := S(n + m), \quad (\text{also } n + (m + 1) := (n + m) + 1).$$

Beweisen Sie nur mittels der Peano Axiome: $\forall m \in \mathbb{N} : 0 + m = m$.

- (2) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen n :

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

- (3) Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an. Begründen Sie die Injektivität mittels der in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften natürlicher Zahlen.

Folgt daraus, dass \mathbb{N} und \mathbb{N}^2 gleichmächtig sind?

- (4) (a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation r aus, welche den Punkt $P = (1, 0)$ in den Punkt $Q = (1/2, \sqrt{3}/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?
 (b) Bestimmen Sie $r(\sqrt{3}, 3)$.
 (c) Ist die Rotation um einen Winkel α eine lineare Funktion auf \mathbb{R}^2 ?

(5) Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über \mathbb{R} :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_b.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems.
 - (b) Wieviele Lösungen hat dieses Gleichungssystem?
 - (c) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A ? Geben Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Zeilen an.
 - (d) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?
- (6) Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}_3$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\dim(\text{span}(P, Q, R))$.
 - (b) Bestimmen Sie ein homogenes SLG, welches genau den von P, Q, R in \mathbb{R}_3 aufgespannten Raum als Lösungsraum besitzt.
- (7) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume derselben Dimension über dem Körper K , $\dim(V) = n = \dim(W)$. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
Wenn f injektiv ist, dann bildet f Basen auf Basen ab; d.h. wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist, dann ist $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von W .
- (8) Die Tschebyschev-Polynome $T_n(x)$ sind wie folgt definiert:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad \text{und} \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 2.$$

- (a) Bestimmen Sie $T_2(x)$ und $T_3(x)$.
- (b) Zeigen Sie: $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ ist eine Basis für den Vektorraum $\text{Pol}_3(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten.
- (c) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen zwischen den Basen $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ und $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ des reellen Vektorraums $\text{Pol}_3(\mathbb{R})$.