Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie I" (326006)
2.2.2007

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

---

(1) (a) Geben Sie die Peano Axiome (P1) – (P5) für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ an.
(b) Die Addition auf $\mathbb{N}$ ist definiert als:

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n \quad \text{und} \\ n + S(m) &:= S(n+m)\ , \quad (\text{also } n + (m+1) := (n+m)+1). \end{aligned}$$

Beweisen Sie nur mittels der Peano Axiome: $\forall m \in \mathbb{N} : 0 + m = m$.

(2) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} \ .$$

(3) Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ an. Begründen Sie die Injektivität mittels der in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften natürlicher und ganzer Zahlen.
Folgt daraus, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind?

(4) (a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation r aus, welche den Punkt $P = (1, 0)$ in den Punkt $Q = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?
(b) Bestimmen Sie $r(1/2, \sqrt{3}/2)$.
(c) ist die Rotation um einen Winkel α eine lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$?

(5) Betrachten Sie das folgende System linearer Gleichungen über $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b} .$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems.
(b) Wieviele Lösungen hat dieses Gleichungssystem?
(c) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die Koeffizientenmatrix A? Geben Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Zeilen an.
(d) Wieviele linear unabhängige Zeilen hat die erweiterte Matrix $(A|b)$?

(6) Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}_3$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{span}(P, Q, R))$.
(b) Bestimmen Sie ein homogenes SLG, welches genau den von P, Q, R in $\mathbb{R}_3$ aufgespannten Raum als Lösungsraum besitzt.

(7) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume derselben Dimension über dem Körper K, $\dim(V) = n = \dim(W)$. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
Wenn f injektiv ist, dann ist f auch bijektiv.

(8) Die Tschebyschev-Polynome $T_n(x)$ sind wie folgt definiert:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad \text{und} \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 2.$$

(a) Bestimmen Sie $T_2(x)$ und $T_3(x)$.
(b) Zeigen Sie: $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ ist eine Basis für den Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten.
(c) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen zwischen den Basen $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ und $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.