Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 11

Auszuarbeiten bis 8.1.2007

Übung 90. Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\{(1,4,3,2),(1,4,1,4),(4,1,1,4)\}$ linear abhängig sind im Vektorraum $V=(\mathbb{Z}_5)^4$ über $\mathbb{Z}_5$ und im Vektorraum $V=\mathbb{Q}^4$ über $\mathbb{Q}$.

Übung 91. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Gruppen um Vektorräume handelt.
(a) $(\mathbb{R},+)$ über $\mathbb{N}$.

(b) $(\mathbb{Q},+)$ über $\mathbb{R}$.

(c) $(\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\},+)$ über $\mathbb{Q}$.

(d) $(\mathbb{C},+)$ über $\mathbb{Q}$.

(e) $(\{a+b\,\pi|a,b\in\mathbb{Q}\},+)$ über $\mathbb{R}$.

Übung 92. Finden Sie, falls möglich, einen Vektorraum mit 8 Elementen oder beweisen Sie, dass ein solcher nicht existieren kann.

Übung 93. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper und V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie **nur** mit Hilfe der Vektorraumgesetze (V1)–(V8) von Definition 5.1: Für alle $\lambda\in K$ und alle $v\in V$ gilt:
(1) $\lambda\,0_V=0_V$.
(2) $0_K\,v=0_V$.

Übung 94. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper und V ein Vektorraum über K. Zeigen oder widerlegen Sie **nur** mit Hilfe der Vektorraumgesetze (V1)–(V8) und Aufgabe 93:
Für alle $\lambda,\mu\in K$ und alle $0_V\neq v\in V$ gilt:
(1) $(-\lambda)\,v=-(\lambda\,v)$.
(2) $\lambda\,v=\mu\,v\;\Rightarrow\;\lambda=\mu$.

Übung 95. Begründen Sie warum $\mathbb{Q}[x]$ und $\mathbb{Q}[[x]]$ Vektorräume über $\mathbb{Q}$ sind. Versuchen Sie, mindestens von einem dieser Vektorräume eine Basis anzugeben.

Übung 96. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind lineare Unterräume über $\mathbb{R}$?
(a) $A:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1-x_2=0\}$.

(b) $B:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1^2-x_2^2=0\}$.

(c) $C:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1^2+x_2^2=0\}$.

(d) $D:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\sum_{i=1}^n ix_i=0\}$.

Übung 97. Seien $U_1:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}$, $U_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x-y+z=0\}$ und $U_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y-z=0\}$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie Basen von U_1, $U_1\cap U_2$ und $U_1\cap U_2\cap U_3$.