Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 12

Auszuarbeiten bis 15.1.2007

Übung 98. Geben Sie ein Beispiel eines Vektorraums V an und eines Teilraums W, sodass zwar dim(W)=dim(V) gilt, aber nicht W=V. (Vergleiche Satz 5.31).

Übung 99. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $M \subseteq V$ mit $\operatorname{span}(M) = V$. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge $B \subseteq M$, sodass B eine Basis von V ist.

Übung 100. Betrachten Sie $V := \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $I := \{0, \ldots, n\}$. Finden Sie eine direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ mit $V_i \neq \{0\}$ für alle $i \in I$ und $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$. Begründen Sie die Korrektheit Ihre Konstruktion.

Übung 101. Sei I eine Indexmenge und seien $\{V_i | i \in I\}$ Teilräume von V über $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $\sum_{i \in I} V_i$ ist eine direkte Summe genau dann wenn die Darstellung des Nullvektors eindeutig ist.

Übung 102. Finden Sie eine lineare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^4$, die die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 40 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 32 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 40 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 104 \end{aligned}$$

beschreibt.

Übung 103. Finden Sie alle lineare Abhängigkeiten von

$$\begin{aligned} &\{(x-1)(x+2)^2(x+3), (x+1)^2(x+3)x, \\ &(x+3)(2x+3)(x^2-x+4), (x+3)(3x^3+2x^2+7x+16\} \subset \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$. (Ein Computeralgebra-System darf verwendet werden.)

Übung 104. Finden Sie drei Unterräume U_1, U_2, U_3 deren Summe nicht direkt ist, aber $U_i \cap U_j = \{0\}$ für zwei verschiedene i, j.

Übung 105. Betrachten Sie $U = \{(x, y, x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ als Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie einen Teilraum W von $\mathbb{R}^4$ sodass $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Übung 106. Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 | (x = z) \wedge (y = 0)\}$ ein Teilraum von V.

(a) Bestimmen Sie den Faktorraum V/U in der Gestalt $\{\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 | \ldots\} \ldots\}$.

(b) Schreiben Sie die Äquivalenzklasse von $(3, -5, 4)$ als lineare Mannigfaltikeit.

(c) Interpretieren Sie die Ergebnisse von (a) und (b) geometrisch.