Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie I
13.Übungsblatt, auszuarbeiten für 22.1.2007

106. Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorraumhomomorphismus mit $h(1,0,0) = (-2,1)$, $h(0,1,0) = (1,2)$, $h(0,0,1) = (3,3)$. Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift $h(x,y,z)$, sowie $kern(h)$, $im(h)$ und Basen dieser Vektorräume.

107. Gegeben ist die Abbildung $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x,y,z,v) \mapsto (x+2y-z+3v, 4x+2y+v, 3x+z-2v, 5x+4y-z+4v)$.

     Zeigen Sie, dass h ein Vektorraumhomomorphismus von $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ ist. Berechnen Sie ausserdem eine Basis von $im(h)$ und prüfen Sie, ob h injektiv ist.

108. Finden Sie eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $h(1,2,3) = (2,0,1,2)$ und $h(2,1,4) = (1,3,5,6)$, sodass
     (a) $dim(im(h)) = 2$.
     (b) $kern(h) = \{0\}$.

109. Sei V ein 1-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Für $k \in K$ definiert man die Funktion $\alpha_k : V \to V, v \mapsto kv$.
     (a) Zeigen Sie, dass α_k ein Vektorraumhomomorphismus ist.
     (b) Zeigen Sie, dass jeder Vektorraumhomomorphismus von der Form α_k ist.

110. Seien V, W und U Vektorräume über dem Körper K. Zeigen Sie, dass $g \circ h$ ein Vektorraumhomomorphismus ist, wobei $h : V \to W$, $g : W \to U$ Vektorraumhomomorphismen sind.

111. Zeigen Sie, dass $(Hom_K(V,V), +, \circ)$ ein Ring mit Einselement ist (V ein Vektorraum über dem Körper K).

112. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zeigen Sie: $(Hom_K(V,V), +, \circ)$ ist ein kommutativer Ring $\Leftrightarrow$ V ist 1-dimensional.

     Hinweis: $\Leftarrow$: Benützen Sie dafür Beispiel 109. $\Rightarrow$: Ist $dim(V) \geq 2$ so gibt es (mindestens) 2 Basisvektoren b_1, b_2. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Basisvektoren nicht-kommutierende Abbildungen.

113. Berechnen Sie explizit alle Elemente des Vektorraums $Hom_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_3)$ und bestimmen Sie eine Basis.

     Geben Sie ausserdem explizit einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{Z}_3^2 \to (\mathbb{Z}_3^2)^*$ an.