auszuarbeiten bis 16. Oktober

Aufgabe 11. Berechnen Sie eine Darstellung der Ebene

$$E\colon 1.2x + \frac{4}{3}y - \frac{\pi}{2}z = 5.7$$

in Parameterform.

Aufgabe 12. Leiten Sie die folgenden Eigenschaften natürlicher Zahlen aus der rekursiven Definition der Addition (Skriptum, Definition 1.2.1) her. Sie können die Formeln, die Sie im Rahmen dieses Beispiels bereits gezeigt haben, verwenden. (Sie dürfen z.B. den Punkt 3. voraussetzen, wenn Sie 4. beweisen und Ihr Beweisgang das erfordern sollte).

1. $S(n) = n + 1$
2. $S(k) + l = S(k + l)$
3. $0 + n = n$
4. $k + l = l + k$
5. $k + (l + m) = (k + l) + m$

Aufgabe 13. Leiten Sie die folgenden Eigenschaften natürlicher Zahlen aus der rekursiven Definition der Multiplikation (Skriptum, Definition 1.2.2) her. Sie können alle Formeln aus Beispiel 12 verwenden.

1. $0 \cdot n = 0$
2. $S(k) \cdot l = k \cdot l + k$
3. $k \cdot l = l \cdot k$
4. $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
5. $k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$
6. $(k + l) \cdot m = k \cdot m + l \cdot m$
7. $k \cdot (l \cdot m) = (k \cdot l) \cdot m$

Aufgabe 14.

1. Berechnen Sie eine Darstellung der reellen Zahl

   $$43.567\overline{832} = 43.567832832832\ldots$$

   als Bruch ganzer Zahlen

2. Geben Sie ein exaktes Argument dafür, daß die beiden Dezimaldarstellungen 1.0 und $0.\dot{9} = 0.9999999\ldots$ dieselbe Zahl bezeichnen.

Aufgabe 15. Die reellen Zahlen bilden einen *geordneter Körper*, das heißt, daß sie - wie die rationalen Zahlen auch - zusätzlich zu den algebraischen Operationen 'Addition' und 'Multiplikation' eine Ordnungsrelation besitzen, die mit diesen Operationen verträglich ist. Genauer gilt

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x + z \leq y + z \\ 0 \leq x \text{ und } 0 \leq y \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq xy. \end{aligned}$$

Geben Sie ein Argument, das zeigt, daß die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper sein können.

Aufgabe 16. Betrachten Sie das Polynom $f = x^n + k$ mit $k, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie: *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle von f, so ist α ganz oder irrational.* (Sie wissen jetzt zum Beispiel, daß Quadratwurzeln natürlicher Zahlen im allgemeinen irrational sein müssen.)

Aufgabe 17. Es seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Das äußere Produkt von a und b ist der Vektor

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

1. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
2. $b \times a = -(a \times b)$
3. $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}^3 \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $a \times a = 0$
5. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$