Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 3

Auszuarbeiten bis 23. Oktober

Übung 18. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels folgende Eigenschaften. Für Mengen A, B, C, D gilt:
(a) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
(b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
(c) $A \setminus (\overline{B} \cup C) = (A \cup B) \setminus C$

Übung 19. Zeigen Sie für Mengen A und B:
(a) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$
(b) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Übung 20. Zeigen Sie für Mengen A, B und Familien $(A_i)_{i \in I}$:
(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(b) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

Übung 21. Zeigen oder widerlegen Sie für eine nichtleere Menge A:
(a) Eine transitive und symmetrische Relation auf A ist auch reflexiv.
(b) Eine reflexive, symmetrische und antisymmetrische Relation auf A ist funktional.

Übung 22. Sei $A = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede mögliche Kombination der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, transitiv eine Relation $\emptyset \neq R \subseteq A \times A$ an. Geben Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf A an.

Übung 23. Finden Sie alle Relationen auf einer Menge $A \neq \emptyset$, die zugleich Ordnungs- und Äquivalenzrelationen sind.

Übung 24. Betrachten Sie die Relation $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \max(|x_1|, 2|x_2|) = \max(|y_1|, 2|y_2|).$$

(a) Begründen Sie, warum $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $(-2, 2)$ und stellen Sie das Ergebnis in einer Skizze dar.
(c) Bestimmen Sie jeweils die Faktormenge in der Form $\{\{\dots | \dots\} | \dots\}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem an.

Übung 25. Gegeben ist die folgende Partition auf $\mathbb{Z}$:

$$P := \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \dots\}.$$

Bestimmen Sie eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}/\sim = P$.

Übung 26. Sei $P(M)$ die Potenzmenge von $M = \{a, b, c, d, e, f\}$.
(a) Zeigen Sie dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf $P(M)$ ist.
(b) Zeichnen Sie das Hassediagramm von $A = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{a, b, c, d\}, M\}$.
(c) Geben Sie alle oberen und unteren Schranken von A an. Geben Sie, falls existent, das Infimum und Supremum von A an.