Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 4

Auszuarbeiten bis 30. Oktober

Übung 27. Seien $(A_1, \leq_1), \ldots, (A_r, \leq_r)$ geordnete Mengen. Finden Sie eine Ordnung auf $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$.

Übung 28. Sind die folgende Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv?
(a) $f : \begin{cases} P(\mathbb{N}) & \to & P(\mathbb{N}) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{cases}$;

(b) $S : \begin{cases} \mathbb{Q}^{\mathbb{N}_0} & \to & \mathbb{Q}^{\mathbb{N}_0} \\ (a_0, a_1, a_2, \ldots) & \mapsto & (a_1, a_2, \ldots) \end{cases}$.

Übung 29. Finden Sie eine Funktion $f : A \to A$ Ihrer Wahl, sodass für $1 \leq i < 5$ die Ungleichheit $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i\times} \neq \mathrm{id}_A$ gilt und für $i = 5$ die Gleichheit $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{5\times} = \mathrm{id}_A$ gilt.

Übung 30. Sei $f : X \to X$ eine Funktion. Beweisen Sie ohne Verwendung von Satz 1.3.39 im Skriptum: Wenn $f(f(x)) = x$ für alle $x \in X$, dann ist f bijektiv.

Übung 31. Es seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:
(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv.
(b) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv.
(c) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.
(d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv.
(e) Es kann sein, dass $g \circ f$ bijektiv ist, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Übung 32. Zeigen oder widerlegen Sie für eine beliebige Funktion $f : A \to B$:
(a) Wenn $S \subseteq T \subseteq A$, dann $f(S) \subseteq f(T)$.
(b) Wenn $S, T \subseteq A$, dann $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.
(c) Wenn $S, T \subseteq A$, dann $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

Übung 33. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen gleichmächtig sind, indem Sie eine Bijektion angeben.
(a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(c) $\mathbb{N} \times [0, 1[$ und $[0, \infty[$.

Übung 34. Zeigen Sie
$$|\mathbb{N}| = |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\}|.$$

Übung 35. Zeigen Sie durch Anwendung des Cantor-Schröder-Bernstein Satzes, dass die Mengen $[0, 1[\times[0, 1[$ und $[0, 1[$ gleichmächtig sind.