Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 06/07
5. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 6.11.2006

36. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptung:
Sei R eine reflexive, symmetrische Relation auf einer nichtleeren Menge A. Sei weiters:
$S = \{ (a,c) \in A\times A \mid \exists b\in A: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \}$
Dann ist $R \cup S$ eine Äquivalenzrelation.

37. Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^{[0,1]}$, also auf der Menge der Funktionen von [0,1] in die reellen Zahlen.
Es gelte $f \sim g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$
(a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $f = x^2$
(b) Bestimmen Sie die Faktormenge M/~ wieder in der Gestalt { { … | … } | … }
(c) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem

38. Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^3$
Es gelte $(x,y,z) \sim (u,v,w) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2+w^2$
(a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von P=(3,0,-4)
(b) Bestimmen Sie die Faktormenge M/~ wieder in der Gestalt { { … | … } | … }
(c) Interpretieren Sie M/~ grafisch.
(d) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem

39. Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Gebilden um Aussagen handelt. Falls ja, bestimmen Sie den Wahrheitswert und die Negation der Aussage.
(a) $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists\ y\in\mathbb{R}\ \forall\ z\in \mathbb{N}: x > z + y$
(b) $\int_0^1 x - 1 dx$
(c) 2+2 = 5
(d) Algebra ist schön.
(e) $\forall a\in\mathbb{R}\ \forall\ b\in\mathbb{R}\ \exists\ c\in \mathbb{R}: a^2 = b^2 + c^2$
(f) $\{ x \in\mathbb{R} \mid x > 0 \}$

40. Formalisieren Sie folgende Aussagen möglichst mathematisch exakt:
(a) Niemand in Linz hat mehr als fünf Verwandte, von denen keiner nicht mindestens eine Fremdsprache spricht.
(b) Keine zwei von drei Studenten sind zusammen älter als der dritte Student.
(c) Mindestens ein Student kann zu jedem europäischen Land zumindest eine Stadt mehr nennen, als sein bester Freund.
(d) Zu mindestens drei verschiedenen Punkten im Raum gibt es mindestens einen Vektor, der normal auf der Ebene steht, die durch die drei Punkte definiert ist.

41. Geben Sie für folgende Mengen jeweils eine aus mathematischen Symbolen aufgebaute Aussageform A(x) an, sodass sich die Menge als $\{x \mid A(x) \}$ schreiben lässt.
(a) { -1, 8, -27, 64, -125, ... }
(b) { 50, 70, 110, 130, 170, 190, 230 }
(c) $\{ 1, 3, 5, 7, 9, ... \} \cup]-\infty,0]$

42. Finden Sie – falls möglich – jeweils Mengen A, sodass folgende Aussagen (a) wahr (b) falsch sind.
    (i) $\forall x \in A\ \forall\, y \in \mathbb{R}: x\, y = 0$
    (ii) $\exists\, x \in A\ \forall\, y \in\, A: x > y$
    (iii) $\exists a \in A\ \forall\, b \in \mathbb{R}\ \exists\, c \in A : a^2 = b^2 + c^2$

43. Welcher der folgenden Aussagenfunktionen sind Tautologien? Welche sind Kontradiktionen?
    (a) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
    (b) $(p \vee q) \Rightarrow \neg\, p$
    (c) $\neg\, (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
    (d) $p \wedge \neg p$
    (e) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg\, q$

44. Arbeiten Sie in MATHEMATICA oder einem vergleichbaren Computer-Algebra-System die Funktionen über Logik durch und überprüfen Sie damit ihre Resultate aus Bsp 43