Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie I
6.Übungsblatt, auszuarbeiten für 13.11.2006

Bitte beachten Sie bei Beweisen für dieses und alle folgenden Übungsblätter: Begründen Sie jeden Zwischenschritt unter Zitieren einer Definition / eines Satzes / ... aus dem Skriptum. Wenn Sie etwas widerlegen, führen Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

45. Vereinfachen Sie die folgende Aussageform (p, q sind Aussagen) unter Verwendung der Distributivgesetze und der Gesetze von De Morgan soweit wie möglich:

$$\neg(p \wedge \neg q) \wedge [(\neg q \wedge \neg p) \vee p]$$

46. (a) Zeigen Sie, dass man zu jeder Aussageform eine dazu gleiche Aussageform finden kann, welche nur aus $\wedge$ und $\neg$ zusammengesetzt ist.

    (b) Was erhält man zum Beispiel bei:

    i. $p \Rightarrow (q \vee r)$

    ii. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

    (p, q, r sind Aussagen)

47. Welche der Folgenden Paare bilden algebraische Strukturen, Halbgruppen oder Gruppen?

    (a) $(\mathbb{Z}, \circ)$ mit $a \circ b := \frac{a}{b}$

    (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ mit $a \circ b := \frac{a}{b}$

    (c) $(M, \circ)$ wobei M=Menge von 10 Personen mit verschiedenem Gewicht und $a \circ b = c$, wobei c die schwerste der 10 Personen ist.

    (d) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \circ)$ mit $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_1 - y_1)$

    (e) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \circ)$ mit $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1)$

48. Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ erfüllt die Kürzungsregel, falls gilt: $\forall a, b, c \in H : (a \circ b = a \circ c) \Rightarrow b = c$ und $\forall b, c, d \in H : (b \circ d = c \circ d) \Rightarrow b = c$.

    (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Gruppe ist eine Halbgruppe mit Kürzungsregel.

    (b) Finden Sie ein Beispiel für eine Halbgruppe ohne Kürzungsregel.

49. Zeigen Sie für eine Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element n:

$$(\forall g \in G : g \circ g = n) \Rightarrow G \text{ ist abelsch.}$$

50. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Eine Unterhalbgruppe eines Monoids ist wieder ein Monoid.

(b) Seien $(A, \circ)$ und $(B, \circ)$ Monoide mit gleicher Verknüpfung und sei $A \subseteq B$. Dann haben A und B das selbe neutrale Element.

51. Berechnen Sie "intelligent" (d.h ohne probieren, bzw. ohne elektronische Hilfsmittel) das inverse Element zu 3 in $(\mathbb{Z}_{71}, \cdot)$. (Hinweis: Betrachten Sie $GGT(3, 71)$)

52. Sei $H := \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\}$.

(a) Überprüfen Sie, ob $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(S_3, \circ)$ ist!

(b) Ist $(H, \circ)$ ein Normalteiler?