auszuarbeiten bis 30. April

Aufgabe 45. Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie das Minimalpolynom der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/3 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46. Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit innerem Produkt, und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie:

1. Für jede lineare Abbildung $h \colon V \longrightarrow V$ ist durch
$$h^\star(y) = \sum_{i=0}^{n} \langle y | h(b_i) \rangle b_i \quad (y \in V)$$
eine lineare Abbildung definiert.

2. $h^\star$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, welche die Adjunktionsbedingung
$$\langle h(x) | y \rangle = \langle x | h^\star y \rangle \quad \forall x, y \in V$$
erfüllt.[1]

Aufgabe 47. Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine distanztreue Abbildung, welche den Koordinatenursprung erhält; es gelte also

$$||f(x) - f(y)|| = |x - y|| \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

wobei $||x|| = \sqrt{\langle x|x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Zeigen Sie, daß f eine lineare Isometrie ist.

> *Anmerkung:* Es ist zu zeigen, daß f eine lineare Abbildung ist. Zeigen Sie zuerst, daß f das Skalarprodukt erhält, und beweisen Sie die Linearität, indem Sie die Tatsache $\langle x|x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ für geeignete Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ ausnutzen.

Aufgabe 48. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim V = n$, und $h \colon V \longrightarrow V$ ein linearer Operator mit Minimalpolynom m_h. Zeigen Sie:

1. $\deg m_h = n$ genau dann, wenn $\exists v \in V$ sodaß $V = \operatorname{span}\{h^r(v) \mid r \in \mathbb{N}\}$.

2. $\deg m_h = n$ und m_h ist Potenz eines irreduziblen Polynoms genau dann, wenn V nicht darstellbar ist als direkte Summe h-invarianter Teilräume positiver Dimension.

Aufgabe 49. Es sei V der-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen, und $P \in V$ die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Insbesondere ist die Abbildung $h^\star$ unabhängig von der Orthonormalbasis, welche für ihre Definition verwendet wird.

Berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung $h\colon V \longrightarrow V$, $h(A) = PA$ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50. Es sei V ein Vektorraum über K, $T : V \longrightarrow V$ ein linearer Operator. Weiters $g, h \in K[x]$ teilerfremde Polynome und $f = gh$. Zeigen Sie

$$\ker(f(T)) = \ker(g(T)) \oplus \ker(h(T)).$$

Aufgabe 51. Berechnen Sie eine Blockdiagonalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -7 & 3 & 3 \\ 22 & -18 & 22 & 2 \\ 33 & -27 & 3 & 23 \\ 42 & -18 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$