Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie I
7.Übungsblatt, auszuarbeiten für 20.11.2006

53. Bestimmen Sie alle Untergruppen und Unterhalbgruppen von $(\mathbb{Z}_5, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, +)$.

54. (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Untergruppe einer Gruppe besitzt dasselbe neutrale Element wie die Gruppe selbst.

    (b) Finden Sie eine Gruppe welche eine unendliche Unterhalbgruppe besitzt, die keine Gruppe ist.

55. Beweisen Sie: Jede endliche Unterhalbgruppe einer Gruppe ist selbst eine Gruppe. (Hinweis: Nehmen Sie ein Element und addieren Sie es oft genug zu sich selbst.)

56. Wir betrachten die Gruppe $(S_3, \circ)$:
    Sei $A_3 := \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$. Zeigen Sie, dass $(A_3, \circ)$ ein Normalteiler der Gruppe $(S_3, \circ)$ ist.

57. (Fortsetzung von Bsp. 56). Bestimmen Sie die Faktorgruppe $(S_3/A_3, \circ)$ durch explizite Angabe ihrer Elemente. Berechnen Sie ausserdem das inverse Element von $K(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix})$.

58. Sei $A := \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Zeigen bzw. widerlegen Sie: $\phi : P(A) \to P(A), M \mapsto C_A(M)$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(P(A), \triangle)$ nach $(P(A), \triangle)$.

59. Bei welcher der folgenden Strukturen handelt es sich um Ringe bzw. um Körper?

    (a) $(P(M), \triangle, \cup)$

    (b) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \circ)$ (= Menge aller Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ mit punktweiser Addition und Funktionshintereinanderausführung)

    (c) $(\mathbb{Z}_{71}, +, \cdot)$

    (d) $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ (komponentenweise)

60. (a) Definieren Sie eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ in der Menge $K = \{a, b, c\}$ so, dass $(K, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

    (b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie dass $(K[x], +, \cdot)$ (siehe Skript Beispiel 1.5.29) ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

61. Zeigen bzw. widerlegen Sie:

    (a) Jeder Körper ist nullteilerfrei.

    (b) Jeder nullteilerfreie Ring ist ein Körper.

62. K bezeichne einen Körper. $+$ und $\cdot$ sind definiert wie im Skript Beispiel 1.5.29)

    (a) Zeigen Sie: Potenzreihen K[[x]] sind ein komm. Ring mit 1. Welche Potenzreihen sind invertierbar?

    (b) Laurentreihen (Potenzreihen die auch Glieder mit negativem Exponenten haben, wobei nur eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten auftreten darf) sind ein Körper.