auszuarbeiten bis 7. Mai 2007

Aufgabe 52. Sei V ein komplexer Vektorraum, $T\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Operator, $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

> $\mu \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von T^r genau dann, wenn es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von T gibt mit $\lambda^r = \mu$.

Aufgabe 53. Sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$, $T\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Endomorphismus, $\lambda \in K$ ein Eigenwert von T der Vielfachheit d. Zeigen Sie, daß $\dim(T - \lambda\mathrm{id})(V) \geq n - d$ ist.

Aufgabe 54. Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Aufgabe 55. Sei A die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix U so, daß UAU^T Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 56. Sei $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein monisches[1] Polynom aus $K[x]$. Bestimmen Sie einen linearen Operator T auf einem n-dimensionalen Vektorraum über K, dessen charakteristisches Polynom f ist.

Aufgabe 57. Sei V der komplexe Vektorraum der Lösungen des Differentialoperators $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$, $D\colon V \longrightarrow V$, $D(f) = \frac{d}{dt}(f)$, mit Minimalpolynom $m_D = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_k)^{e_k}$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{\exp(\alpha_i t), t\exp(\alpha_i t), \ldots, t^{e_i - 1}\exp(\alpha_i t)\}$$

eine Basis von V ist.

[1] Ein Polynom heißt *monisch* oder *normiert*, wenn es den Skalar 1 zum Leitkoeffizienten hat.