Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 06/07
8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 27.11.2006

63. Zeigen Sie:
(a) ξ ist ein Gruppen**mono**morphismus von G_1 nach $G_2 \Leftrightarrow$ kern $(\xi) = \{n_1\}$ (n_1 sei das neutrale Element von G_1)
(b) ψ ist ein Gruppen**epi**morphismus von G_1 nach $G_2 \Leftrightarrow$ im $(\psi) = G_2$

64. Definition: Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn sie ein *erzeugendes Element* a besitzt, d.h. ein Element $a \in G$, sodass jedes Element $g \in G$ sich schreiben lässt als $g = a^z$ (z-malige Hintereinanderausführung) für ein $z \in \mathbb{Z}$.
Sei φ ein Gruppen**epi**morphismus von (G_1, o_1) nach (G_2, o_2). Zeigen Sie:
(a) (G_1, o_1) ist abelsch $\Rightarrow$ (G_2, o_2) ist abelsch
(a) (G_1, o_1) ist zyklisch $\Rightarrow$ (G_2, o_2) ist zyklisch

65. Zeigen Sie: Jede unendliche zyklische Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z},+)$

66. Gegeben sei ϕ: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $z \rightarrow z \bmod 5$
(a) Zeigen Sie: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus.
(b) Bestimmen Sie kern ϕ und im ϕ

67. (Fortsetzung von Bsp. 66):
Bestätigen Sie Satz 1.5.25 für obiges Beispiel, d.h. bestimmen Sie explizit den Isomorphismus für dieses Beispiel und zeigen Sie direkt (ohne Verwendung von 1.5.25), dass es sich tatsächlich um einen Isomorphismus handelt.

68. Finden Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine Formel für $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ und beweisen Sie diese mit Induktion.

69. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils für $n\times n$ Matrizen A, B über $\mathbb{R}$:
(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(b) $A^2 = 0_{n\times n} \Leftrightarrow A=0_{n\times n}$
(c) $(A+B)^T = B^T+A^T$

70. Eine $n\times n$ Matrix A kommutiert mit einer $n\times n$ Matrix B, falls AB=BA.
Zeigen oder widerlegen Sie: Eine $n\times n$ Matrix C über $\mathbb{R}$ kommutiert genau dann mit allen $n\times n$ Matrizen D über $\mathbb{R}$, wenn C die Gestalt λI_n hat mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

71. (a) Bildet die Menge $G = \{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe?
(b) Zeigen Sie die Behauptung nach Def. 2.2.1, also $R_\varphi R_\theta = R_{\varphi+\theta} = R_\theta R_\varphi$

72. Definition:
(i) Eine Matrix A über $\mathbb{C}$ heißt *hermite'sch*, genau dann wenn $A^t = \overline{A}$
(ii) Eine Matrix A über $\mathbb{C}$ heißt *schief-hermite'sch*, genau dann wenn $A^t = -\overline{A}$
(wobei $\overline{A}$ die Matrix bezeichne, die anstelle jedes Elements a+bi von A das komplex konjugierte a-bi enthält.)
Zeigen Sie: Jede $n\times n$ Matrix über $\mathbb{C}$ lässt sich schreiben als Summe einer hermite'schen und einer schief-hermite'schen Matrix.