

auszuarbeiten bis 4. Dezember

Aufgabe 73. Seien $A, B, C \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = AB.$$

Man berechne A^k, B^k, C^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 74. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & -2 \\ 8 & 2 & -5 & 11 & 4 \\ 9 & 4 & -5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

1. eine Zeilenstaffelform von A ;
2. die reduzierte Zeilenstaffelform von A ;
3. die Normalform von A .

Aufgabe 75. Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. über \mathbb{R} ;
2. über dem Körper $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

Aufgabe 76. Bestimmen Sie - ohne Zuhilfenahme eines Computeralgebrasystems - die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z - u + 3v - w &= 1 \\ -2x - 2y + z - 2u - 3v + w &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 77. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem über \mathbb{R}

$$\alpha x + 2y = 0, \quad 2x + \alpha y = 0.$$

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es mehr als eine Lösung?

Aufgabe 78. Es sei K der Körper $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 4, \quad 2x - 2y = 4$$

mit Koeffizienten aus K .

1. Finden Sie alle Lösungen.
2. Veranschaulichen Sie zeichnerisch die Situation in der Ebene $K \times K$.

Aufgabe 79. Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\4x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3 \\-3x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 4\end{aligned}$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge.

Aufgabe 80. Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\3x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 &= -3 \\4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 6 \\2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 14x_4 &= -12.\end{aligned}$$

Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme eines Computers die Lösungsmenge. Vergleichen Sie ihre Lösungen mit denen, die von einem Computeralgebrasystem ausgegeben werden.