4 Invertierbare Matrizen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Frage, welche Matrizen eine multiplikative Inverse haben und wie wir im gegebenen Fall diese Inverse bestimmen können. Die Matrizen sind alle über demselben Körper K.

Definition 4.1: *Sei A eine $m \times n$ Matrix. Eine $n \times m$ Matrix X heisst* **Linksinverse** *von A wenn gilt $XA = I_n$.*
X heisst **Rechtsinverse** *von A wenn gilt $AX = I_m$.*

Beispiel 4.2: (i) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat unendlich viele Linksinverse der Form

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & a \\ -3 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

aber keine Rechtsinverse.
(ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die eindeutig bestimmte Links- und Rechtsinverse

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz 4.3: *Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt:*

(i) A hat eine Rechtsinverse g.d.w. $\mathrm{rang}(A) = m$;

(ii) A hat eine Linksinverse g.d.w. $\mathrm{rang}(A) = n$.

Satz 4.4: *Hat die Matrix A sowohl eine Linksinverse X als auch eine Rechtsinverse Y, dann gilt:*

(i) A ist quadratisch;

(ii) $X = Y$.

Wenn die Matrix A also sowohl eine Linksinverse als auch eine Rechtsinverse hat, so ist diese eindeutig bestimmt.

Satz 4.5: *Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix. FAÄ:*

(i) A hat eine Linksinverse;

(ii) A hat eine Rechtsinverse;

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$;

(iv) die Hermite-Form von A ist I_n;

(v) A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

Definition 4.6: *Aus den obigen Sätzen sehen wir, dass eine einseitige Inverse einer quadratischen Matrix A automatisch eine beidseitige Inverse ist. Wir sprechen also nur von der* **Inversen** *von A und schreiben diese als A^{-1}. Die Inverse ist, wenn sie existiert, eindeutig (Satz 4.4).*

Hat die quadratische Matrix A eine Inverse, so heisst A **invertierbar** *bzw.* **regulär**. *Hat A keine Inverse, so heisst A auch* **singulär**.

Korollar zu Satz 4.5: *Sei A eine quadratische Matrix.*

(i) Ist A invertierbar, dann ist auch A^{-1} invertierbar. Weiters gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Jedes Produkt von Elementarmatrizen ist invertierbar. B ist also zeilenäquivalent zu A g.d.w. es eine invertierbare Matrix E gibt sodass $B = EA$.

Aus Satz 4.5 können wir sofort eine Methode herleiten um die Invertierbarkeit der quadratischen $n \times n$ Matrix A zu entscheiden, und gegebenenfalls A^{-1} zu berechnen. Dazu gehen wir von der Matrix $A|I_n$ aus und wenden elementare Zeilenoperationen an, um den linken Teil in I_n zu transformieren. Ist das nicht möglich, so ist A nicht invertierbar. Gelingt es aber, so haben wir im rechten Teil automatisch die Inverse A^{-1} stehen. Dieser Prozess sieht wie folgt aus:

$$A|I_n \to E_1A|E_1 \to E_2E_1A|E_2E_1 \to \cdots \ .$$

In jedem Schritt dieses Prozesses haben wir also Matrizen der Form

$$S|Q = E_i \cdots E_1A|E_i \cdots E_1$$

vorliegen, für welche gilt $QA = S$. Ist A invertierbar, so erreichen wir schliesslich die Endkonfiguration

$$I_n|E_p \cdots E_1 \ ,$$

sodass $E_p \cdots E_1A = I_n$, also

$$A^{-1} = E_p \cdots E_1 \ .$$

Beispiel 4.7: Wir wollen den oben beschriebenen Prozess anwenden auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Dabei erhalten wir die folgenden Konfigurationen:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \to \quad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\to \quad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\to \quad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\to \quad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 4 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\to \quad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Die Matrix A ist also invertierbar, und die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

In Maple 9.5 können wir die Inverse wie folgt berechnen:

\> **with(LinearAlgebra):**
\> **A:=Matrix([[1,2,3],[1,3,4],[1,4,4]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

\> **B:=MatrixInverse(A);**

$$B := \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Sind die beiden $n \times n$ Matrizen A und B invertierbar, so ist i.a. die Summe $A + B$ nicht invertierbar. Das sieht man etwa am Beispiel $A = I_n, B = -I_n$. Das Produkt AB ist aber sehr wohl invertierbar.

Satz 4.8: *Seien A und B $n \times n$ Matrizen. Sind sowohl A als auch B invertierbar, dann ist auch AB invertierbar und es gilt*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} .$$

Korollar: *Ist A invertierbar, dann ist auch A^m invertierbar für jede natürliche Zahl m (man beachte, dass $A^0 = I_n$). Weiters gilt*

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m \ .$$

Satz 4.9: *Ist A invertierbar, dann ist auch die Transponierte A^T invertierbar. Weiters gilt*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \ .$$

Wir erinnern daran, dass die $n \times n$ Matrix A **orthogonal** ist, wenn gilt

$$AA^T = I_n = A^T A \ .$$

Aus Satz 4.5 sehen wir, dass nur eine dieser Gleichungen notwendig ist. Eine orthogonale Matrix ist also eine invertierbare Matrix deren Inverse die Transponierte ist.

Satz 4.10: *Sei $A \cdot x = b$ ein SLG von n Gleichungen in n Variablen. A ist also eine $n \times n$ Matrix, und b ein Spaltenvektor der Länge n. Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} \cdot b$ der eindeutig bestimmte Lösungsvektor des Gleichungssystems.*

Beispiel 4.11: Wir betrachten das SLG aus Beispiel 3.1 und 3.39.

```
> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix([[0,1,2],[1,-2,1],[0,3,-4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> b := <1,0,23>;
> B := MatrixInverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}$$

```
> B.b;
```

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

□