9 Innere Produkte

In diesem Kapitel betrachten wir immer Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Definition 9.1: *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein* **inneres Produkt** *oder* **Skalarprodukt** *auf V ist eine Abbildung $f : V^2 \to \mathbb{R}$, geschrieben als $(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$, sodass für alle $x, x', y \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:*

(1) $\langle x + x'|y\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x'|y\rangle$;

(2) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$;

(3) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$;

(4) $\langle x|x\rangle \geq 0$, *mit Gleichheit genau dann, wenn* $x = 0$.

Unter einem **reellen inneren Produktraum** *verstehen wir einen Vektorraum V über $\mathbb{R}$, auf welchem ein inneres Produkt $\langle .|.\rangle$ erkärt ist.*
In analoger Weise können wir ein inneres Produkt auf einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachten; wir müssen nur die Eigenschaft (3) *ersetzen durch die Eigenschaft* ($\overline{3}$)*:*

($\overline{3}$) $\overline{\langle x|y\rangle} = \langle y|x\rangle$,

wobei $\overline{c}$ die komplex konjugierte Zahl zu c ist (man beachte, dass daraus wegen $\langle x|x\rangle = \overline{\langle x|x\rangle}$ folgt $\langle x|x\rangle \in \mathbb{R}$, also die Bedingung (4) sinnvoll ist).
Unter einem **komplexen inneren Produktraum** *verstehen wir einen Vektorraum V über $\mathbb{C}$, auf welchem ein inneres Produkt $\langle .|.\rangle$ erkärt ist.*
Abkürzend nennen wir einen inneren Produktraum einfach **IP-Raum**. □

Wir erinnern daran, dass für eine komplexe Zahl $c = a+bi$ die die komplex konjugierte Zahl die Gestalt $\overline{c} = a - bi$ hat. Für eine reelle Zahl r gilt $\overline{r} = r$. Wir können also die Eigenschaft ($\overline{3}$) auch für einen reellen Vektorraum mit innerem Produkt fordern, sie wird in diesem Fall einfach zu (3). Wir werden also meist einfach von (3) sprechen, im komplexen Fall aber darunter ($\overline{3}$) verstehen.

Lemma 9.2: *Sei V ein (reeller oder komplexer) IP-Raum mit innerem Produkt $\langle .|.\rangle$, und K der Grundkörper, also $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Dann gelten auch die folgenden Beziehungen für alle $x, y, y' \in V$ und $\alpha \in K$:*

(5) $\langle x|y + y'\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|y'\rangle$,

(6) $\langle x|\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x|y\rangle$,

(7) $\langle x|0_V\rangle = 0 = \langle 0_V|y\rangle$.

Beispiel 9.3: Auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle .|.\rangle : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \langle (x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

offensichtlich ein inneres Produkt. Es heisst das **kanonische innere Produkt** oder **kanonische Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$.
Auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rc} \langle .|. \rangle : & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \langle (z_1, \ldots, z_n) | (w_1, \ldots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i} \end{array}$$

offensichtlich ein inneres Produkt. Es heisst das **kanonische innere Produkt** oder **kanonische Skalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$. □

Beispiel 9.4: (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $V = C([a, b], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Aus elementaren Eigenschaften des Integrals leitet man her, dass die Abbildung von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$, definiert durch

$$(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_a^b fg \ ,$$

ein inneres Produkt auf $V = C([a, b], \mathbb{R})$ ist.
(b) Ebenso ist auf dem reellen Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n, also $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$, die Abbildung

$$(p, q) \mapsto \langle p | q \rangle = \int_0^1 pq$$

ein inneres Produkt. □

Beispiel 9.5: Für $n \times n$ Matrizen A ist die **Spur** (**trace**) definiert als

$$\mathrm{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \ .$$

Mittels der Abbildung

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{spur}(B^T A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

wird der reelle Vektorraum $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ zu einem inneren Produktraum.
Mittels der Abbildung

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{spur}(\overline{B^T} A)$$

wird der komplexe Vektorraum $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ zu einem inneren Produktraum. □

Definition 9.6: *Sei V ein (reeller oder komplexer) IP-Raum. Für jedes $x \in V$ definieren wir die* **Norm** *von x als die nicht-negative reelle Zahl*

$$\| \ x \ \| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \ .$$

Wir nennen ein $x \in V$ **normiert**, *wenn $\| \ x \ \| = 1$.*
Für $x, y \in V$ definieren wir den **Abstand** (**Distanz**) *zwischen x und y als*

$$d(x, y) \ = \| \ x - y \ \| \ .$$ □

Aus der Eigenschaft (4) folgt sofort: $\| x \| = 0 \iff x = 0_V$.

Beispiel 9.7: Sei $\mathbb{R}^2$ der reelle IP-Raum unter dem kanonischen inneren Produkt. Dann gilt offensichtlich für $x = (x_1, x_2)$

$$\| x \|^2 = x_1^2 + x_2^2 \ ,$$

also $\| x \|$ ist der Abstand von x zum Ursprung $(0,0)$.
Ebenso gilt für $y = (y_1, y_2)$

$$\| x - y \|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \ ,$$

also $\| x - y \|$ ist der Abstand zwischen x und y. □

Satz 9.8: *Sei V ein IP-Raum. Dann gilt für alle $x, y \in V$ und alle Skalare λ:*

(i) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$;

(ii) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) [1] $\quad |\langle x|y\rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \|$;

(iii) (Dreiecksungleichung) $\quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Beispiel 9.9: Im inneren Produktraum $\mathbb{R}^n$ unter dem kanonischen inneren Produkt bedeutet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \ .$$

Definition 9.10: *Sei V ein innerer Produktraum. $x, y \in V$ heissen* **orthogonal** *genau dann, wenn $\langle x|y\rangle = 0$. Wir schreiben dafür $x \perp y$.*
Eine Teilmenge S von $V \setminus \{0\}$ heisst eine **orthogonale Teilmenge** *bzw. ein* **Orthogonalsystem** *genau dann, wenn jedes Paar verschiedener Elemente von S orthogonal ist. Ist S eine Basis von V, so heisst es eine* **orthogonale Basis** *oder* **Orthogonalbasis**.
Eine **orthonormale Teilmenge** *bzw. ein* **Orthonormalsystem** *von V ist ein Orthogonalsystem S, sodass $\| x \| = 1$ für jedes $x \in S$. Ist S eine Basis von V, so heisst es eine* **orthonormale Basis** *oder* **Orthonormalbasis**.

Beispiel 9.11: (a) Bzgl. des kanonischen inneren Produkts bilden die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ orthonormale Teilmengen. In $\mathbb{R}^2$ etwa sind zwei Vektoren $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ orthogonal genau dann, wenn $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$. Geometrisch bedeutet das, dass die Gerade vom Nullpunkt durch x senkrecht liegt zur Geraden vom Nullpunkt durch y.
(b) Die Matrizen $E_{i,j}$ bilden eine orthonormale Teilmenge des inneren Produktraums der $n \times n$ Matrizen aus Bsp. 9.5. □

Satz 9.12: *Sei V ein innerer Produktraum und S eine orthogonale Teilmenge, welche nicht den Nullvektor enthält. Dann ist S linear unabhängig.*

Satz 9.13: *Sei V ein innerer Produktraum und sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine orthonormale Teilmenge. Dann gilt für alle $x \in V$:*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x|b_i\rangle|^2 \leq \| x \|^2 \ . \qquad (\textbf{Bessel-Ungleichung})$$

[1] Augustin L. Cauchy (1789–1857), Hermann A. Schwarz (1843–1921)

Satz 9.14: *Sei V ein innerer Produktraum, sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine orthonormale Teilmenge, und sei $W = \operatorname{span}(B)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $x \in W$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} |\langle x|b_i\rangle|^2 = \| x \|^2$;

(3) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|b_i\rangle b_i$;

(4) $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|b_i\rangle\langle b_i|y\rangle$ *für alle* $y \in V$.

Definition 9.15: *Sei V ein innerer Produktraum. Eine* **orthonomale Basis** *von V ist eine orthonormale Teilmenge, welche eine Basis von V ist.*

Beispiel 9.16: Die kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sind orthonormale Basen. □

Jeder endlichdimensionale innere Produktraum besitzt eine orthonormale Basis. Eine solche orthonormale Basis kann auch aus einer gegebenen Basis konstruiert werden durch den sogenannten **Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozess**.

Satz 9.17 (Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozess): *Sei V ein innerer Produktraum. Für jeden Vektor $x \neq 0$ verwenden wir die Bezeichnung $x^* = x/ \| x \|$. Ist $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ eine k-elementige linear unabhängige Teilmenge von V, und sind die Vektoren y_i $(1 \leq i \leq k)$ definiert als*

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1^*, \\ y_2 &:= (x_2 - \langle x_2|y_1\rangle y_1)^*, \\ &\vdots \\ y_k &:= (x_k - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k|y_i\rangle y_i)^*, \end{aligned}$$

dann ist $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ eine orthonormale Basis für $\operatorname{span}(X)$.

Korollar: *Jeder endlichdimensionale innere Produktraum hat eine orthonormale Basis.*

Beispiel 9.18: Im inneren Produktraum $\mathbb{R}^3$ bzgl. des kanonischen inneren Produkts gehen wir aus von der Basis

$$x_1 = (0, 1, 1), \quad x_2 = (1, 0, 1), \quad x_3 = (1, 1, 0).$$

Daraus wollen wir eine orthonormale Basis $\{y_1, y_2, y_3\}$ konstruieren mittels des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsprozesses.
Zunächst setzen wir

$$y_1 := \frac{x_1}{\| x_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Danach bestimmen wir

$$\begin{aligned} x_2 - \langle x_2|y_1\rangle y_1 &= (1, 0, 1) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\langle (1, 0, 1)|(0, 1, 1)\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \\ &= (1, 0, 1) - \tfrac{1}{2}(0, 1, 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(2, -1, 1), \end{aligned}$$

und erhalten durch Normalisierung

$$y_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1).$$

Schliesslich bestimmen wir

$$x_3 - \langle x_3 | y_2 \rangle y_2 - \langle x_3 | y_1 \rangle y_1 = \frac{2}{3}(1, 1, -1),$$

und erhalten durch Normalisierung

$$y_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

Somit haben wir eine orthonormale Basis $\{y_1, y_2, y_3\}$ gefunden. □

Satz 9.19 (Pythagoras): (Pythagoras von Samos, ca 580–500 v.Chr.) *Sei V ein IP-Raum und x, y orthogonale Elemente in $V \setminus \{0\}$, also $x \perp y$. Dann gilt*

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \quad .$$

Im folgenden geben wir zu einem Vektor $v \in V$ und dem von einer Orthonormalbasis aufgespannten Teilraum W die "beste" Approximation in W zu v an.

Satz 9.20: *Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ ein Orthonormalsystem im IP-Raum V. Sei $v \in V$ und sei $v_S := \sum_{i=1}^m \langle v | s_i \rangle s_i$. Dann gilt für alle $t \in \operatorname{span}(S)$:*

(i) $(v - v_S) \perp t$,

(ii) $\| v - v_S \| \leq \| v - t \|$.

Definition 9.21: *Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ ein Orthonormalsystem im IP-Raum V. Sei $v \in V$ und sei $v_S := \sum_{i=1}^m \langle v | s_i \rangle s_i$. Der Vektor v_S heisst auch die* **orthogonale Projektion** *von v auf $\operatorname{span}(S)$. Wie wir oben gesehen haben ist v_S die beste Approximation zu v in $\operatorname{span}(S)$.*
Die Identität (3) in Satz 9.14 für $x \in \operatorname{span}(B)$

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle x | b_i \rangle b_i$$

nennt man auch **Fourier-Entwicklung** *von x bzgl. der orthonormalen Basis B (Jean-Baptiste Fourier, 1768–1830). Die Skalare $\langle x | b_i \rangle$ heissen dabei die* **Fourier-Koeffizienten** *von x.*
Die Identität (4) in Satz 9.14 nennt man auch **Parseval-Identität**.

Satz 9.22: *Sei V ein endlichdimensionaler innerer Produktraum der Dimension n. Zu jeder orthonormalen Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_k\}$ gibt es $x_{k+1}, \ldots, x_n \in V$, sodass $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis von V ist.*

Definition 9.23: *Seien V und W innere Produkträume über demselben Körper. Ein Vektorraumisomorphismus $f : V \to W$ ist ein* **innerer Produktisomorphismus** *genau dann, wenn f innere Produkte erhält, also wenn gilt*

$$\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Satz 9.24: *Seien V und W endlichdimensionale innere Produkträume über demselben Körper mit $\dim(V) = n = \dim(W)$, sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine orthonormale Basis von V, und sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung.*
Dann ist f ein innerer Produktisomorphismus genau dann, wenn $f(B) = \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ eine orthonormale Basis von W ist.

Ein Skalarprodukt erzeugt also eine Norm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum. Wir können aber auch die wesentlichen Eigenschaften einer solchen Norm zur abstrakten Definition eines normierten Vektorraums heranziehen.

Definition 9.25: *Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum, also $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\| \ \| : V \to \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ heisst eine* **Norm** *auf V genau dann, wenn für alle $x, x' \in V$, $\lambda \in K$ gilt*

(1) $\| x \| \geq 0$, *mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$,*

(2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$,

(3) $\| x + x' \| \leq \| x \| + \| x' \|$ *(Dreiecksungleichung).*

Ist auf V eine Norm definiert, so heisst V ein **normierter Vektorraum**.

Beispiel 9.26: Wir haben oben schon gesehen, dass jedes Skalarprodukt eine Norm induziert. Aber nicht jede Norm ist von einem Skalarprodukt induziert. Ein Beispiel dafür ist die **Maximumsnorm** etwa auf $\mathbb{R}^2$:

$$\| (x, y) \|_{\max} := \max(|x|, |y|).$$

Es gibt kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, welches die Maximumsnorm induziert. □

Mittels eines Skalarprodukts können wir auch vom Winkel zwischen zwei Elementen eines Vektorraums sprechen. Dieser so eingeführte Begriff des Winkels stimmt im Fall von $\mathbb{R}^2$ mit dem allgemein üblichen Begriff überein.

Satz 9.27: *Sei V ein reeller IP-Raum. Dann gilt für alle $x, y \in V$*

$$-1 \ \leq \frac{\langle x|y\rangle}{\| x \| \cdot \| y \|} \ \leq 1 \ .$$

Definition 9.28: *Sei V ein IP-Raum und seien x, y zwei vom Nullvektor verschiedene Elemente von V. Dann heisst der in $[0, \pi]$ eindeutig bestimmte Winkel α mit*

$$\cos \alpha \ = \ \frac{\langle x|y\rangle}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

der **Winkel zwischen** x **und** y, *geschrieben als $\alpha = \angle(x, y)$.*

Satz 9.29: *Der Winkel zwischen zwei Vektoren in einem IP-Raum ist unabhängig von der "Länge" des Vektors. Insbesondere können wir die Vektoren normieren vor der Bestimmung des Winkels:*

$$\angle(x,y) \;=\; \angle\Big(\frac{x}{\| x \|}, \frac{y}{\| y \|}\Big) \quad \text{für alle } x,y \in V,\; x \neq 0 \neq y.$$

Satz 9.30: *In $\mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt ist der Winkel zwischen zwei Vektoren unabhängig von Rotation. Dazu schreiben wir (in isomorpher Weise) die Vektoren als Spaltenvektoren. Wir betrachten für zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ die um den Winkel θ rotierten Vektoren (vgl. Kap. 2.2)*

$$x_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad y_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \; .$$

Dann gilt $\angle(x,y) = \angle(x_\theta, y_\theta)$.

Aufgrund dieser Invarianzen reicht es aus, in $\mathbb{R}^2$ etwa den Winkel zwischen einem Vektor $x = (x_1, x_2)$ der Länge (Norm) 1 und dem Vektor $e_1 = (1,0)$ zu betrachten. Durch Skizzierung auf dem Einheitskreis sieht man sofort, dass in der klassischen analytischen Geometrie für den Winkel α zwischen x und e_1 gelten sollte

$$\cos\alpha = x_1.$$

Das ergibt sich offensichtlich auch aus obiger allgemeiner Definition angewandt auf diesen Spezialfall:

$$\cos\alpha = \frac{\langle x | e_1 \rangle}{\| x \| \cdot \| e_1 \|} = \langle x | e_1 \rangle = x_1.$$

Beispiel 9.31: Wir betrachten noch ein Beispiel zur Fourierentwicklung. Als IP-Raum nehmen wir $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ mit dem in Beispiel 9.4(a) definierten inneren Produkt

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} fg \; .$$

Die Funktionen $e(x), s_k(x), c_k(x)$ seien erklärt als

$$e(x) = 1, \quad s_k(x) = \sin(kx), \quad c_k(x) = \cos(kx) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \; .$$

Dann ist

$$\tilde{S} = \{e\} \;\cup\; \{s_k | 1 \leq k\} \;\cup\; \{c_k | 1 \leq k\}$$

eine orthogonale Teilmenge von $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ (Details siehe Übungen).
Normieren wir die Elemente in $\tilde{S}$, so erhalten wir das Orthonormalsystem

$$S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \;\cup\; \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} s_k \mid 1 \leq k\} \;\cup\; \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} c_k \mid 1 \leq k\}$$

(man beachte, dass die Elemente von S Funktionen von $[0,2\pi]$ nach $\mathbb{R}$ sind).
Sei nun W_n der $(2n+1)$-dimensionale Teilraum von $C([0,2\pi],\mathbb{R})$, welcher aufgespannt wird durch die Orthonormalbasis

$$S_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \;\cup\; \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} s_k \mid 1 \leq k \leq n\} \;\cup\; \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} c_k \mid 1 \leq k \leq n\} \; .$$

Dann erhalten wir die beste Approximation zu einer Funktion $f(x) \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$ als das Element

$$f_n(x) \;=\; \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$$

wobei

$$\lambda_0 = \langle f(x) | \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)dx \ ,$$

$$\lambda_{k,1} = \langle f(x) | \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx \quad \forall 1 \le k \le n \ ,$$

$$\lambda_{k,2} = \langle f(x) | \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx \quad \forall 1 \le k \le n \ .$$

Ist $f(x)$ unendlich oft differenzierbar, dann ist $(f_n(x))_{n \ge 1}$ eine Cauchy-Folge mit Limes $f(x)$. Wir können also dann schreiben

$$f(x) \;=\; \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k \ge 1} \lambda_{k,1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) + \sum_{k \ge 1} \lambda_{k,2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \ .$$

Das ist die **Darstellung der Funktion $f(x)$ als Fourier-Reihe**. □

Projektionen

Definition 9.32: *Seien A und B Unterräume des Vektorraums V, sodass $V = A \oplus B$ (also V ist das direkte Produkt von A und B, vgl. Def. 5.35). Also kann jedes $x \in V$ eindeutig dargestellt werden als $x = a + b$ für $a \in A$ und $b \in B$. Unter der* **Projektion auf A parallel zu B** *verstehen wir die lineare Abbildung $p : V \to V$ mit $p(x) = a$.* □

Beispiel 9.33: Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ kann dargestellt werden als direkte Summe

$$\mathbb{R}^2 \;=\; X \oplus D$$

für

$$X = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad D = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \ .$$

Die Projektion auf X parallel zu D ist gegeben durch

$$p(x,y) \;=\; (x-y,0) \ .$$

Das Bild des Punktes (x,y) ist also der Schnittpunkt der Geraden durch (x,y) parallel zu D mit der Geraden X. Deshalb auch die Terminologie "Projektion parallel zu einem Unterraum". □

Definition 9.34: *Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. f ist eine* **Projektion** *wenn es Unterräume A, B gibt, sodass $V = A \oplus B$ und f ist die Projektion auf A parallel zu B.*
f heisst **idempotent** *wenn gilt $f^2 = f$.* □

Satz 9.35: *Sei der Vektorraum V die direkte Summe der Unterräume A und B, also $V = A \oplus B$. Sei p die Projektion auf A parallel zu B. Dann gilt:*

(i) $A = \mathrm{im}(p)$,

(ii) $A = \{x \in V \mid x = p(x)\}$,

(iii) $B = \mathrm{kern}(p)$,

(iv) p *ist idempotent.*

Satz 9.36: *Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist eine Projektion gdw f idempotent ist. Ist das der Fall, dann lässt sich der Vektorraum V darstellen als die direkte Summe $V = \mathrm{im}(f) \oplus \mathrm{kern}(f)$, und f ist die Projektion auf $\mathrm{im}(f)$ parallel zu $\mathrm{kern}(f)$.*

Satz 9.37: *Ist $f : V \to V$ eine Projektion, dann ist auch $id_V - f$ eine Projektion, und es gilt $\mathrm{im}(f) = \mathrm{kern}(id_V - f)$.*

Wir wollen nun eine Verbindung herstellen zwischen der Dekomposition eines Vektorraums in eine direkte Summe und Projektionen.

Satz 9.38: *Sei V ein Vektorraum. Es gibt vom Nullraum verschiedene Teilräume $V_1, \ldots, V_n$ mit $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ genau dann, wenn es von der Nullabbildung verschiedene lineare Abbildungen $p_1, \ldots, p_n : V \to V$ gibt, sodass*

(i) $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}_V$, *und*

(ii) $p_i \circ p_j = 0$ *für alle* $i \neq j$.

Weiters ist jede Abbildung p_i notwendigerweise eine Projektion und $V_i = \mathrm{im}(p_i)$.

Beispiel 9.39: Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ besitzt offensichtlich die Dekomposition

$$\mathbb{R}^2 \;=\; X \oplus Y \;,$$

wobei $X = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ die x-Achse und $Y = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$ die y-Achse ist. Die Projektion auf X parallel zu Y ist gegeben durch $p_X(x, y) = (x, 0)$ und die Projektion auf Y parallel zu X ist gegeben durch $p_Y(x, y) = (0, y)$. Offensichlich gelten die Beziehungen

$$p_X + p_Y = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad p_X \circ p_Y = 0 = p_Y \circ p_X \;,$$

also die Beziehungen (i) und (ii) aus Satz 9.38. □

Solche Projektionen und damit Dekompositionen ergeben sich insbesondere in inneren Produkträumen. Das wollen wir im folgenden untersuchen.

Definition 9.40: *Sei V ein IP-Raum und E eine nicht-leere Teilmenge von V. Das* **orthogonale Komplement** *von E, geschrieben $E^\perp$, ist die Menge aller Elemente von V, welche zu jedem Element von E orthogonal sind, also*

$$E^\perp \;:=\; \{y \in V \mid \langle x|y\rangle = 0 \text{ für alle } x \in E\} \;.$$ □

Lemma 9.41: *Sei V ein IP-Raum.*

(i) *Für jede Teilmenge E von V ist $E^\perp$ ein Teilraum von V.*

(ii) $V^\perp = \{0\}$ *und* $\{0\}^\perp = V$.

Satz 9.42: *Sei V ein IP-Raum und sei W ein endlich-dimensionaler Teilraum von V. Dann gilt*

$$V = W \oplus W^{\perp} .$$

Satz 9.43: *Ist V ein endlich-dimensionaler IP-Raum und W ein Teilraum von V, dann gilt*

$$\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W) .$$

Weiters gilt $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Satz 9.44: *Sei V ein endlichdimensionaler IP-Raum, und seien A und B Teilräume von V. Dann gilt*

(i) $A \subseteq B \implies B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$;

(ii) $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$;

(iii) $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

Beispiel 9.45: Wir betrachten dieselbe Situation wie in Beispiel 9.18. Sei

$$W = \operatorname{span}(\{x_1, x_2\}) = \operatorname{span}(\{(0,1,1),(1,0,1)\}) .$$

Wir bestimmen $W^{\perp}$. Eine Orthogonalbasis für $\mathbb{R}^3$ ist

$$\{(0,1,1),\ (2,-1,1),\ (1,1,-1)\} .$$

Dabei ist $W = \operatorname{span}(\{(0,1,1),(2,-1,1)\})$, und daher $W^{\perp} = \operatorname{span}(\{(1,1,-1)\})$. □

Orthogonale Matrizen und Abbildungen

Definition 9.46: *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ oder $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Die Matrix A heisst* **orthogonal**, *falls die Zeilen von A bzgl. des kanonischen Skalarprodukts eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bilden. Orthogonale Matrizen über dem Komplexen nennt man auch* **unitär**. □

Man beachte, dass für orthogonale Matrizen nicht nur die Orthogonalität der Zeilen gefordert wird, sondern deren Orthonormalität.

Beispiel 9.47: Rotationsmatrizen (vgl. Kap. 2.2)

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

sind orthogonale Matrizen.
Die Matrix

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Spiegelung um die x-Achse:

$$S_x \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} .$$

Solche Spiegelungsmatrizen sind ebenfalls orthogonale Matrizen. □

Satz 9.48: *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist orthogonal;*

(ii) $A \cdot A^T = I_n$;

(iii) $A^T \cdot A = I_n$;

(iv) *A ist regulär und $A^{-1} = A^T$;*

(v) *A^T ist orthogonal, also die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}_n$;*

(vi) *es gibt Orthonormalbasen B und C von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, sodass A die zugehörige Basistransformationsmatrix ist, also $A = \mathcal{A}_B^C$.*

Satz 9.49: *Sei $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ eine lineare Abbildung auf dem IP-Raum V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\| h(v) \| = \| v \|$ und $\angle(v, w) = \angle(h(v), h(w))$ für alle $v, w \in V$;*

(ii) *$\langle h(v) | h(w) \rangle = \langle v | w \rangle$ für alle $v, w \in V$;*

(iii) *$\mathcal{A}_{h,B,B}$ (die Darstellungsmatrix von h bzgl. B) ist orthogonal für alle Orthonormalbasen B von V.*

Definition 9.50: *Sei $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ eine lineare Abbildung auf dem IP-Raum V, und erfülle h eine (und damit alle) Bedingungen in Satz 9.49. Dann heisst h* **orthogonal** *oder eine* **Isometrie**. *Eine Isometrie über dem Grundkörper $\mathbb{C}$ nennt man auch* **unitär**. □

Beispiel 9.51: Alle Drehungen sind Isometrien.
Über $\mathbb{C}$ ist die lineare Abbildung $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit

$$h(x, y) \;=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine Isometrie, also eine unitäre Abbildung. □

Räume mit algebraischer und topologischer Struktur

Ein **Vektorraum** trägt eine lineare Struktur.

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass es auch sinnvoll ist, auf reellen oder komplexen Vektorräumen ein inneres Produkt zu haben; auf diese Weise wird ein Vektorraum zu einem **inneren Produktraum**.

Ein inneres Produkt induziert eine Norm, jeder IP-Raum ist also auch ein **normierter Raum**, aber nicht umgekehrt.

In einem normierten Raum kann man durch $d(x, y) = \| x - y \|$ eine Distanz (Abstand) definieren. Diese Distanz ist nicht-negativ mit $d(x, y)$ gdw $x = y$, sie ist symmetrisch, und sie erfüllt die Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Wir können aber auch allgemein Räume betrachten, welche diese Bedingungen erfüllen.

Definition 9.52: *Sei M eine Menge, und $d : M^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\forall x, y \in M: \ d(x,y) \geq 0$ *und* $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in M: \ d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in M: \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Dann heisst d eine **Metrik** *auf M, und M zusammen mit d heisst ein* **metrischer Raum**.
□

In einem metrischen Raum kann man von Konvergenz und Cauchy-Folgen sprechen. Verbindet man solche topologischen Eigenschaften mit algebraischen Eigenschaften, so erhält man etwa den wichtigen Begriff des Hilbert-Raumes.

Definition 9.53: *Ein innerer Produktraum, der vollständig ist bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik, in dem also jede Cauchy-Folge konvergiert, heisst* **Hilbert-Raum**. □

Beispiele für Hilbert-Räume sind $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt, oder $C([a,b],\mathbb{R})$ mit dem in Beispiel 9.4 definierten Skalarprodukt.