12 Konvexe Mengen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Euklidschen Raum $\mathbb{R}^n$. Dieser Euklidsche Raum ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und er ist ausgestattet mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x|y\rangle$. Daraus erhalten wir auch die kanonische Norm $\| x \|$.

Definition 12.1: *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist* **konvex** *gdw.*

$$\forall P, Q\, \forall t \;:\; \big[P, Q \in S \wedge t \in [0,1] \Longrightarrow (1-t)P + tQ \in S \big] \,.$$

Also mit zwei Punkten P und Q enthält S auch die Strecke $\overline{PQ}$. □

Satz 12.2: *Der Durchschnitt $S \cap T$ konvexer Mengen S, T ist konvex.*

Das gilt übrigens auch für beliebige Indexmengen I: *Ist jedes S_i kompakt, dann ist auch $\bigcap_{i\in I} S_i$ kompakt.*

Satz 12.3: *Seien $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen die Punktmenge*

$$KH(P_1, \ldots, P_m) \;:=\; \{t_1P_1 + \ldots + t_mP_m \mid 0 \le t_i \le 1,\; t_1 + \cdots + t_m = 1\}$$

die Menge der beschränkten Linearkombinationen.

(i) *Die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \ldots, P_m)$ ist eine konvexe Menge.*

(ii) *Jede konvexe Menge, welche $P_1, \ldots, P_m$ enthält, enthält auch die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \ldots, P_m)$.*

(iii) *Die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \ldots, P_m)$ ist die kleinste konvexe Menge, welche die Punkte $P_1, \ldots, P_m$ enthält.*

Aufgrund dieses Satzes versehen wir diese Menge der beschränkten Linearkombinationen mit einem besonderen Namen.

Definition 12.4: *Seien $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge (der beschränkten Linearkombinationen)*

$$KH(P_1, \ldots, P_m) \;=\; \{t_1P_1 + \ldots + t_mP_m \mid 0 \le t_i \le 1,\; t_1 + \cdots + t_m = 1\}$$

heisst die **konvexe Hülle** *der Punkte $P_1, \ldots, P_m$.*

Satz 12.5: *Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.*

(i) *Falls S konvex ist in $\mathbb{R}^m$, dann ist $f(S)$ konvex in $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Falls T konvex ist in $\mathbb{R}^n$, dann ist $f^{-1}(T)$ konvex in $\mathbb{R}^m$.*

Beispiel 12.6: (i) Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \langle a|x\rangle = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

ist linear von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$. Ein Punkt $c \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich konvex. Somit ist also auch die Hyperebene

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a|x\rangle = c\}$$

eine konvexe Menge.
(ii) Das Intervall $[c, \infty)$ ist konvex in $\mathbb{R}$. Somit ist auch die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \langle a|x\rangle \geq c\}$$

konvex. Wir sprechen von einem **abgeschlossenen Halbraum**. Ebenso ist natürlich auch

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \langle a|x\rangle > c\}$$

konvex und heisst ein **offener Halbraum**. Genauso erzeugen die Relationen $\leq$ und $<$ abgeschlossene und offene Halbräume. Für $n = 1$ sprechen wir von Halbebenen. □

Eine Hyperebene mit Gleichung $\langle a|x\rangle = c$ bestimmt also 2 abgeschlossene Halbräume mit definierenden Ungleichungen

$$\langle a|x\rangle \geq c \qquad \text{und} \qquad \langle a|x\rangle \leq c\ .$$

Ebenso bestimmt diese Hyperebene auch 2 offene Halbräume mit definierenden Ungleichungen

$$\langle a|x\rangle > c \qquad \text{und} \qquad \langle a|x\rangle < c\ .$$

Da der Durchschnitt konvexer Mengen konvex ist, ist jeder Durchschnitt endlich vieler (offener oder abgeschlossener) Halbräume wieder konvex. Ein solcher endlicher Durchschnitt von Halbräumen kann beschränkt oder unbeschränkt sein (eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^n$ ist **beschränkt** gdw. es ein $c \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $\| x \| \leq c$ für alle $x \in S$).

Im folgenden werden wir allgemein über offene und abgeschlossene Mengen sprechen wollen. Dieser Begriff gehört in die Topologie. Hier geben wir nur eine Definition für den Euklidschen Raum $\mathbb{R}^n$.

Definition 12.7: *Sei S eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. S heisst* **offen**, *wenn es zu jedem Punkt $x \in S$ eine Kugel $K_c(x) = \{y \mid \| x - y \| \leq c\}$ (mit $c \in \mathbb{R}^+$) gibt, welche vollständig in S enthalten ist. Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so heisst das Komplement von S, also $\mathbb{R}^n \setminus S$,* **abgeschlossen**. *Der* **Rand** *von S ist die Menge*

$$\{x \mid \forall c \in \mathbb{R}^+ : K_c(x) \cap S \neq \emptyset \ \wedge \ K_c(x) \not\subseteq S\}\ ,$$

also die Menge derjenigen Punkte x, für welche jede Kugel um x sowohl S als auch das Komplement von S schneidet. □

Beispiel 12.8: In $\mathbb{R}$ ist das Intervall $(0,1)$ offen, sein Komplement $\overline{(0,1)} = [0,1]$ also abgeschlossen.
In $\mathbb{R}^3$ ist die Menge $\{x \mid \| x \| \neq 1\}$ offen, ihr Komplement (die Kugeloberfläche) daher abgeschlossen. □

Satz 12.9: *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei T diejenige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche aus allen Grenzwerten von Folgen in S besteht. Dann ist T die kleinste abgeschlossene Menge, welche S enthält.*

Definition 12.10: *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei T die Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche aus allen Grenzwerten von Folgen in S besteht. Dann heisst T der* **Abschluss** *von S.*

Satz 12.11: *Der Abschluss einer konvexen Menge S ist ebenfalls konvex.*

Unterstützende Hyperebenen

Satz 12.12: *Sei S eine abgeschlossene konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ und sei $P \in \mathbb{R}^n$. Dann liegt entweder P in S, oder es gibt eine Hyperebene H, sodass $P \in H$ und S in einer der durch H erzeugten offenen Halbräume von $\mathbb{R}^n$ enthalten ist.*

Definition 12.13: *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei P ein Punkt im Rand von S. Die Hyperebene H ist eine* **unterstützende Hyperebene** *von S bei P gdw. $P \in H$ und S ist enthalten in einer der beiden von H erzeugten abgeschlossenen Halbräume.*

Satz 12.14: *Sei S eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei P ein Punkt im Rand von S. Dann gibt es eine unterstützende Hyperebene von S bei P.*

Satz 12.15: *Sei S eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei $H = \{y \mid \langle N|y\rangle = a\}$ eine Hyperebene, sodass $\langle N|x\rangle \geq a$ für alle $x \in S$ (S liegt also ganz in einem von H erzeugten Halbraum). Liegt ein Punkt P sowohl in S als auch in H, dann liegt P im Rand von S und H ist eine unterstützende Hyperebene von S bei P.*

Extrempunkte

Definition 12.16: *Sei S konvex in $\mathbb{R}^n$ und sei $P \in S$. P heisst* **Extrempunkt** *von S gdw. es keine verschiedenen Punkte $Q_1, Q_2 \in S$ gibt, sodass P geschrieben werden kann als*

$$P \;=\; tQ_1 + (1-t)Q_2 \quad \text{für } 0 < t < 1$$

(P kann nur dann auf einem Geradensegment in S liegen, wenn es ein Endpunkt dieses Segments ist).

Satz 12.17: *Sei S eine beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann enthält jede unterstützende Hyperebene von S einen Extrempunkt.*

Wie in Satz 12.3 kann man für eine beliebige Teilmenge S von $\mathbb{R}^m$ zeigen, dass die Menge aller beschränkten Linearkombinationen von Punkten in S eine konvexe Menge ist. Das ist natürlich somit die kleinste konvexe Menge, welche S enthält.

Definition 12.18: *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge (der beschränkten Linearkombinationen)*

$$KH(S) \;=\; \{t_1P_1 + \ldots + t_mP_m \,|P_1, \ldots, P_m \in S, \;\; 0 \leq t_i \leq 1, \; t_1 + \cdots + t_m = 1\}$$

heisst die **konvexe Hülle** *der Menge S.*

Satz 12.19: (Krein-Milman) *Sei S eine abgeschlossene beschränkte konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist S die konvexe Hülle seiner Extrempunkte.*

Konvexe Menge und die Bestimmung von Extrempunkten spielen eine wichtige Rolle in vielen Gebieten der Mathematik, etwa in der linearen Optimierung (Simplex-Verfahren) und in der Computational Geometry (Voronoi-Diagramme).