Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
0. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 8.10.2007

0.1. (Mengen) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Begründung!)

(a)	$\{1\} = \{\{1\}\}$	$\{1\} = \{1,1\}$	$\{1,2\}=\{\{1\},2\}$
(b)	$\{\{2\},1\}=\{\{1\},2\}$	$\{2,\{1\}\}=\{\{1\},2\}$	$\{\}=\{\{\}\}$
(c)	$\{\}=\{0\}$	$0\in\{\}$	$\{\}\subseteq\{1\}$
(d)	$\{\} \in \{1\}$	$\{\} \in \{\{\}\}$	$\{\}\subseteq\{\{\}\}$
(e)	$2\in\{1,\{2\}\}$	$\{1\}\in\{1,\{2\}\}$	$\{2\}\in\{1,\{2\}\}$
(f)	$1\subseteq\{1\}$	$1 \in \{\{1\}\}$	$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$
(g)	$\{1,2\}\in\{1,2,3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2\},3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2,3\}\}$

0.2. (Mengen) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Begründung!)

(a)	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Q}\in\mathbb{R}$
(b)	$\{1\}\in\mathbb{N}$	$1\in\mathbb{N}$	$1\in\{\mathbb{N}\}$
(c)	$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N}\}$	$\{\mathbb{N}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$	$\{\mathbb{Z}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$
(d)	$\{\mathbb{N}\}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Z}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\{\} \in \mathbb{N}$
(e)	$\{\} \subseteq \{\mathbb{N}\}$	$\{\} \subseteq \mathbb{N}$	$\mathbb{Z}\in\mathbb{N}$

0.3. (Aussagen) Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen und formulieren sie jeweils die Negation (das Gegenteil).

- zu jeder natürlichen Zahl gibt es zumindest eine größere
- jede ganze Zahl ist das Produkt zweier natürlicher Zahlen
- es gibt eine reelle Zahl, die die Summe zweier kleinerer natürlichen Zahlen ist
- die Summe zweier beliebiger ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl
- es gibt mindestens eine natürliche Zahl,die nicht kleiner als die Summe der um eins bzw. um zwei verminderten Zahl ist
- für jedes Element n aus $\mathbb{N}$ gibt es eine Teilmenge B von $\mathbb{N}$, sodass alle Zahlen,die größer als n sind, nicht in B liegen.
- der Betrag einer komplexen Zahl $z\neq 0$ ist größer gleich der Summe ihres Real- und Imaginärteils
- es gibt eine reelle Zahl, die größer als alle positiven natürliche Zahlen ist
- die Differenz einer reellen und einer anderen rellen Zahl ist immer ungleich 0
- zu jeder natürlichen Zahl gibt es zumindest eine größere

0.4. (Denksportaufgabe) Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten. Jede Karte zeigt auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl. Die Kartenreihe zeigt folgende Symbole:
E K 4 7

<u>Behauptung:</u> Wenn eine Karte auf einer Seite einen Vokal trägt, dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl.

Welche der Karten **muss** man **unbedingt** umdrehen, um zu zeigen, dass diese Behauptung der Wahrheit entspricht? Formulieren Sie ihre Lösung möglichst präzise.

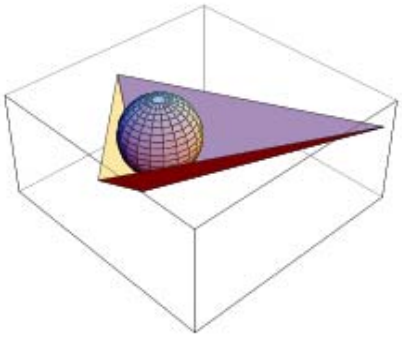
0.5. (Natürliche Zahlen) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion (Bernoullische Ungleichung) :

Für alle a aus]-1,oo[und für alle n aus $\mathbb{N}$ gilt: $(1+a)^n \geq 1+na$

Zusatzfrage : Sind die Voraussetzungen an a und n wirklich notwendig?

0.6. (Analytische Geometrie)

(a) Die 3 Ebenen ε_1: $2x + 2y + z = 0$, ε_2: $x - 2y + 2z = 0$ und ε_3: $-2x + y + 2z = 0$ bilden einen Trichter (s. Skizze), in den eine Kugel mit Radius r=1 gelegt wird.
In welchem Punkt befindet sich der Mittelpunkt der Kugel?
Führen Sie Nebenrechnungen wenn möglich mit einem Computeralgebrasystem wie MATHEMATICA durch.



(b) Die Kugel habe eine Masse von 10 kg. Berechnen Sie die Beträge der Kräfte, mit denen die Kugel auf die drei Ebenen drückt. Rechnen sie mit $g=10ms^{-2}$.

0.7. (Trigonometrie) Durch einen Stadtturm verläuft eine geradlinige Straße. Entlang der Straße stehen in einer Entfernung von je 200m Marksteine. Von der Spitze des Turmes erscheint die Strecke zwischen erstem und zweitem Stein unter einem Sehwinkel von 10,2°. Wie hoch ist der Turm, wenn der erste Stein ebenfalls 200m vom Fußpunkt des Turmes entfernt ist?
Lösen Sie das Beispiel rechnerisch und überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung anhand einer Skizze.
<u>Lösungshinweis :</u> Summensatz!

0.8. (Lineares Gleichungssystem) Ist es jeweils möglich, in folgendem Gleichungssystem über den reellen Zahlen den Parameter a so zu wählen, dass das System …

- keine Lösung hat
- genau eine Lösung hat
- genau drei Lösungen hat
- unendlich viele Lösungen hat

$$\begin{aligned} x + 2y \quad - z &= 1 \\ x + y \quad - z &= 3 \\ 3x + (4+a)y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils, falls möglich, die Lösungs**menge** an.
Überprüfen Sie Ihre Lösung mit einem Computeralgebraprogramm wie z.B. MATHEMATICA.