Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2, SS 08
1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 10.3.2008

1.1 <u>Definition:</u> Unter dem *Zyklus* $(a_1, \ldots, a_n)$ versteht man folgende bijektive Abbildung:
$a_i \to a_{i+1}$ für $1 \le i < n$
$a_n \to a_1$

(a) Zeigen Sie: Jede Permutation lässt sich als Hintereinanderausführung von Zyklen schreiben.
(b) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie π in ein Produkt von Zyklen. Ist die Zerlegung eindeutig?

1.2 Zeigen Sie: Für jede Transposition τ gilt: $\mathrm{sign}(\tau) = -1$

1.3 (a) Zerlegen Sie π aus 1.1b in ein Produkt von Transpositionen. Ist diese Zerlegung eindeutig?
(b) Bestimmen Sie die Menge und die Anzahl der Fehlstellen von π
(c) Bestimmen Sie die Signatur von π sowohl mittels Bsp 1.3a (also über die Transpositionen) und einmal mit Bsp 1.3b (also über die Fehlstellen).

1.4 (a) Zeigen Sie **ausführlich** die Formel aus Bsp 7.16. (Vandermonde'sche Determinante) (im Skriptum ist der Beweis nur skizziert)
(b) Berechnen Sie (ohne Computer) die Determinante von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{pmatrix};$$

1.5 (a) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen (ohne Computer).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Z}_2$ (ohne Computer).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Seien A, b wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Bestimmen Sie im Gleichungssystem $Ax = b$ den Wert von x_3 mittels der Cramer'schen Regel.

1.7 Seien A, B regulär. Zeigen Sie : $(A \cdot B)_{ad} = B_{ad} \cdot A_{ad}$
Gilt die Aussage auch für singuläre Matrizen?

1.8 Gilt das Korollar zu Satz 7.17 auch für Matrizen über Ringen?