Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 15.10.2007

ACHTUNG!
Gerechnete Beispiele bis spätestens <u>Mo.15.10. 08:15 im KG 4. Stock</u> auf den ausgehängten Gruppenlisten ankreuzen.

1.1. Zeigen (d.h. beweisen) Sie folgende Aussagen für natürliche Zahlen k, L, m **ausschließlich unter Verwendung von Definition 1.2.1, Skript.** Sie dürfen jedoch eine hier bereits gezeigte Aussage verwenden, um eine andere zu zeigen. Achten Sie aber dabei darauf, nicht „im Kreis“ zu gehen, d.h. etwa (1) für (2) zu verwenden, (2) für (4) und (4) für (1). So dürfen Sie etwa die Kommutativität nicht verwenden, wenn nicht bereits Punkt (4) gezeigt wurde! **Achtung: Geben Sie für jeden einzelnen Zwischenschritt ihrer Beweise an, welchen Teil von 1.2.1 sie verwenden bzw. warum dieser Schritt gültig ist.**

1. $S(n) = n + 1$
2. $S(k) + L = S(k + L)$
3. $0 + n = n$

1.2. (Fortsetzung von 1.1)

4. $k + L = L + k$
5. $k + (L + m) = (k + L) + m$

1.3. Wie Beispiel 1.1 und 1.2, aber unter Verwendung von **Definition 1.2.2, Skript.** Auch Definition 1.2.1 und Beispiel 1.1. und 1.2 dürfen hier verwendet werden.

1. $0 \cdot n = 0$
2. $S(k) \cdot L = k \cdot L + L$
3. $k \cdot L = L \cdot k$
4. $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$

1.4. (Fortsetzung von 1.3)

5. $k \cdot (L + m) = k \cdot L + k \cdot m$
6. $(k + L) \cdot m = k \cdot m + L \cdot m$
7. $k \cdot (L \cdot m) = (k \cdot L) \cdot m$

1.5 Überprüfen Sie folgende Beweise auf Korrektheit. Sollte ein Beweis inkorrekt geführt sein, begründen Sie ausführlich, weshalb.

(a) für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt : $n = m$

Beweis : Seien $n, m \in \mathbb{N}$

$n = m \Leftrightarrow n(n-m) = m(n-m) \Leftrightarrow n^2-nm = mn-m^2 \Leftrightarrow n^2-2nm+m^2 = 0 \Leftrightarrow$
$(n-m)^2 = 0 \Leftrightarrow n-m = 0 \Leftrightarrow n = m$, was ja zu zeigen war.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+1}{2}$

Beweis : Induktion nach n: Sei $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss : $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n + 1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n + 1) + \frac{n^2+n+1}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2}$
stimmt.

(c) für alle n $\in \mathbb{N}$ gilt : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^3}{2}$

Beweis : Sei n $\in \mathbb{N}$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^3}{2}$ wir multiplizieren links uns rechts mit 0 (dividieren durch 0 ist verboten, multiplizieren ja nicht)

0 = 0 stimmt.

1.6 Überprüfen Sie folgende Beweise auf Korrektheit. Sollte ein Beweis inkorrekt geführt sein, begründen Sie ausführlich, weshalb.

(a) Für alle n $\in \mathbb{N}$ gilt : $(n+1)^2 = n^2+2n+1$

Beweis : <u>Widerspruchsbeweis:</u> Sei n $\in \mathbb{N}$

Angenommen $(n+1)^2 \neq n^2+2n+1$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $(n+1)^2 = n^2+2n+1$

Damit gilt die Behauptung.

(b) Wir zeigen : Alle Studenten sind gleich alt.

Beweis : Induktion nach Zahl der Studenten:

Sei n $\in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang : 1 Student ist gleich alt wie er selbst, klar.

Induktionsannahme : n Studenten haben dasselbe Alter.

Induktionsschluss : Gegeben seien (n+1) Studenten (durchnummeriert).

Wegen der Annahme haben die Studenten 1 bis n, aber auch 2 bis n+1 jeweils dasselbe Alter. Damit haben aber alle (n+1) dasselbe Alter.

(c) Wir zeigen : Jeder gesunde Student kann beliebig viel Gewicht heben.

Beweis : Induktion nach Milligramm Gewicht.

Induktionsanfang : Jeder gesunde Student kann 1 mg Gewicht heben, klar.

Induktionsannahme : Jeder gesunde Student kann n mg Gewicht heben.

Induktionsschluss : Wenn der Student n mg heben kann, dann natürlich auch n+1, denn 1mg Gewicht mehr oder weniger ist nicht spürbar.

(d) (Eine Variante von 1.5.a) : für alle n, m $\in \mathbb{N}$ gilt : n = m

Beweis : Seien n, m $\in \mathbb{N}$

$n = m \Leftrightarrow n(n-m) = m(n-m) \Leftrightarrow n^2-nm = mn-m^2$

da aber laut Voraussetzung n=m gilt, haben wir nun:

$mn-m^2 = mn-m^2 \Leftrightarrow 0=0$ … fertig …

1.7. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion :

(a) $2^n > n^2$ für alle n $\in \mathbb{N}$, n ≥ 5

(b) $1+q+\ldots+q^n = (1-q^{n+1})/(1-q)$

1.8. Finden Sie für folgende Summen einen „geschlossenen Ausdruck“, also eine Summenformel, und beweisen Sie das Ergebnis dieser Formel mit Induktion :

(im Sinne von : $1+2+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

(a) $\frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$

(b) $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$