Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2, SS 08
2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 31.3.2008

2.1 Zeigen Sie das Korollar zu Satz 8.2 (ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte).

2.2 Sei f die lineare Abbildung, die einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $2x - y = 0$ spiegelt.
(a) Überlegen Sie sich rein an Hand der Definition (ohne char. Polynom, ohne Rechnung), wie die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume dieser Abbildung aussehen müssen.
(b) Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume von f und vergleichen Sie mit (a).
(c) Überprüfen Sie die Resultate mit Mathematica oder einem anderen Computeralgebrasystem.
<u>Bemerkung :</u> Zur besseren geometrischen Vorstellung rechnen Sie mit der kanonischen Basis.

2.3 Sei f die lineare Abbildung, die einen Punkt im $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $\varepsilon : x+2y+2z = 0$ spiegelt.
(a) Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass die Darstellungsmatrix von f eine möglichst einfache Form hat.
(b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Basistransformation die Darstellungsmatrix von f bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

2.4 Wie Aufgabe 2.2. für die Abbildung aus 2.3. (Rechnen Sie mit der kanonischen Basis aus (b)).

2.5 Sei A eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie:
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

2.6 Sei h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von *h* mit den algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.
(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenräume.
(c) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, sodass A(h;B,B) eine Diagonalmatrix ist.
(d) Finden Sie eine Matrix C, sodass $C^{-1} \cdot A(h;K,K) \cdot C$ eine Diagonalmatrix ist.
(e) Überprüfen Sie alle Ergebnisse mit Mathematica oder einem anderen Computer-Algebra-System.
<u>Bemerkung :</u> Die vorkommenden Gleichungssysteme dürfen Sie mit einem Computer lösen.

2.7 Lösen Sie folgendes gekoppelte System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \text{ Anfangsbedingungen: } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

<u>Bemerkung</u> : Nebenrechnungen (etwa Diagonalisieren) mit Computer.

2.8 Eine Bakterienkultur bestehe aus 200 Bakterien vom Typ I, 300 vom Typ II und 1000 vom Typ III. Von einer Generation x_i zur nächsten x_i' ändert sich die Bakterienpopulation gemäß:

$$x_1' = \frac{87}{70}\, x_1 + \frac{8}{35}\, x_2$$
$$x_2' = \frac{3}{35}\, x_1 + \frac{67}{70}\, x_2$$
$$x_3' = \frac{11}{10}\, x_3$$

(a) Wie viele Bakterien existieren nach 12 Generationen?
<u>Hinweis :</u> Lösen Sie das Beispiel durch Bestimmung der k-ten Potenz der Übergangsmatrix.
(b) Bestimmen Sie (etwa durch Simulation) das <u>Verhältnis</u> der drei Bakterientypen zueinander nach sehr langer Zeit.

<u>Bemerkung</u> : Nebenrechnungen dürfen Sie mit einem Computer durchführen.

2.9 Zeigen oder widerlegen Sie jeweils folgende Aussagen für einen Körper K :

(a) Sei $A \in K_n^n$ regulär, dann gilt: λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda^{-1}$ ist Eigenwert von A^{-1}
(b) Sei $A \in K_n^n$ regulär, dann gilt: λ ist Eigenwert von $A \Rightarrow k\lambda$ ist Eigenwert von $k \cdot A$
(c) $c_A = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(d) $c_{AB} = c_A + c_B$

2.10 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_6^6$

(a) Bestimmen Sie das **Minimal**polynom von A (Nebenrechnungen mit Computer).
(b) Bestimmen Sie (mit einem Computer) Eigenwerte, -vektoren und –räume von A, sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten und beantworten Sie damit die Frage, ob A diagonalisierbar ist.

2.11 Berechnen Sie A^{-1} und A^3 für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.