Lineare Algebra und Analytische Geometrie (WS 07/08)
2. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 22. Oktober 2007)

2.1 (Induktionsbeweis)

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + k^2 + k = \frac{7n^2 + 5n^3}{4} \tag{2}$$

2.2 (Neue Multiplikation auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$—Vorbereitung auf Beispiel 2.3)
Quelle (vom 2007-10-10): `http://www.math.uni-bonn.de/people/jean/la1/uebungen/la1-ws0405-2.pdf`

Sei $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Die Addition und Multiplikation auf K sei durch

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \tag{3}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 + 2a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \tag{4}$$

für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ definiert. Finden Sie für jedes Element $a = (a_1, a_2) \in K$, ein $b \in K$, sodass

$$a + b = (0, 0). \tag{5}$$

Finden Sie für jedes Element $a = (a_1, a_2) \in K$ außer $(0, 0)$, ein $c \in K$, sodass

$$a \cdot c = (1, 0). \tag{6}$$

2.3 (Lösungen von $x^2 = 1$)
Quelle (vom 2007-10-10): `http://www.math.uni-bonn.de/people/jean/la1/uebungen/la1-ws0405-2.pdf`

Sei $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und die Rechenoperation auf K wie in Beispiel 2.2. Zeigen Sie, dass $x^2 = 2$ in K eine Lösung besitzt.

(*Hinweis:* Verwenden Sie $(2, 0)$ als 2 in K.)

Ergibt sich daraus ein Widerspruch zu Satz 1.2.15 aus dem Skript zur Vorlesung? Immerhin besteht K ja aus Paaren *rationaler* Zahlen.

2.4 (Ist die Wahl von $i = \sqrt{-1}$ zwingend?)

Finden sie ein Element $j \neq \sqrt{-1}$, sodass jede polynomiale Gleichung eine Lösung in den Zahlen

$$a + bj \tag{7}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat. Dadurch ist die Menge dieser Zahlen (für die üblichen Rechenoperationen) algebraisch abgeschlossen—genauso wie $\mathbb{C}$ es ist.

2.5 (Polarkoordinatendarstellung auf $\mathbb{C}$)

Für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r, \phi \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$, sodass

$$z = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right). \tag{8}$$

Bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung solcher r und ϕ für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a > 0$.

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \geq 0$ und $r_2 \geq 0$, sodass

$$z_1 = r_1\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right), \text{ und} \tag{9}$$

$$z_2 = r_2\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right). \tag{10}$$

Bestimmen Sie $r_3, \phi_3 \in \mathbb{R}$, sodass

$$z_1 \cdot z_2 = r_3\left(\cos\phi_3 + i\sin\phi_3\right). \tag{11}$$

2.6 (Einfach in $\mathbb{C}$ exponentieren)

Berechnen sie $z, \mathrm{re}\left(z\right)$, und $\mathrm{im}\left(z\right)$ für

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{4711}. \tag{12}$$

(*Hinweis:* Wechseln Sie zum Exponentieren auf die Polarkoordinatendarstellung aus Beispiel 2.5)

2.7 (Erweiterter Euklidscher Divisionsalgorithmus)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler g von

$$m_1 = 798, m_2 = 1190 \text{ und } m_3 = 2415 \tag{13}$$

und $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, sodass

$$g = a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3. \tag{14}$$

2.8 (Konjugation und Rechenoperationen auf $\mathbb{C}$)
Quelle (vom 2007-10-10): `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hannes/WS06/LA1/uebungen/04.pdf`

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{15}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{16}$$

2.9 (Konjugation für Funktionen auf $\mathbb{C}$)
Quelle (vom 2007-10-10): `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hannes/WS06/LA1/uebungen/04.pdf`

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n. \tag{17}$$

Zeigen oder widerlegen Sie $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.