# Lineare Algebra und Analytische Geometrie (WS 07/08)
## 3. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 29. Oktober 2007)

3.1 (Mengenoperationen)

Sei $U := \{1, 2, \ldots, 8\}$ das Universum für dieses Beispiel. Berechnen Sie

$$\begin{array}{ccc} A \cap B, & \overline{\emptyset}, & \overline{U}, \\ B \cup C, & \overline{A \cup B \cup C}, & A \triangle B \triangle C, \\ A \setminus (B \cup C), & (B \cup C) \setminus A \text{ und} & \bigcup_{i \in \emptyset} A_i, \end{array}$$

wobei

$$A := \{2, 5, 6, 8\}, \tag{1}$$
$$B := \{2, 3, 4, 5\}, \tag{2}$$
$$C := \{4, 5, 6, 7\}. \tag{3}$$

3.2 (Geschachtelte Mengen)

Berechnen Sie

$$((\{a \in \mathbb{N} \mid a < 2\} \times \{3, 4\} \times \{\{5, 6\}\}) \setminus ((\{1\} \times \{3\} \times \{5, 6, 7\}) \cup \{1, \{1, 4\}\})) \cup \{1, \{1, 3\}\} \tag{4}$$

durch Aufzählen der Elemente und nur unter der Verwendung von Mengennotation. (Also *keine* runden Klammern!)

3.3 (Beweis zu Satz 1.3.21)

Beweisen Sie Satz 1.3.21 aus dem Vorlesungsskript. Zu zeigen ist also

(a) $K(a) = K(b) \iff a \sim b$,

(b) $a \not\sim b \iff K(a) \cap K(b) = \emptyset$, und

(c) $\bigcup_{a' \in A} K(a') = A$,

wobei $a, b \in A$, $A$ eine beliebeige Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $A$ ist.

3.4 (Aussagen über Äquivalenzrelationen)
Quelle:
`http://www-m11.ma.tum.de/~karpfing/la1/ang/blatt04.pdf`
(vom 2007-10-21)

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge $A$, dann folgt für $a, b \in A$ mit $a \sim b$ wegen der Symmetrie auch $b \sim a$ und wegen der Transitivität aus $a \sim b$ und $b \sim a$ auch $a \sim a$. Die Relation $\sim$ ist also eine Äquivalenzrelation.

(b) $\sim_2 := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \geq b\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(c) $\sim_3 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b > 0\} \cup \{(0,0)\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(d) $\sim_4 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(e) $\sim_5 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b \geq -1\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

3.5 (Äquivalenzrelationen erzeugen)
Quelle:
`http://www.minet.uni-jena.de/algebra/uebungen/ws-2006-2007/Mathem(LinAlg)-haberl/blatt3.pdf`
(vom 2007-10-21)

Sei $A = \{1,2,3,4,5\}$.

- Begründen Sie, warum $\sim := \{(1,2),(3,4),(4,5)\}$ keine Äquivalenzrelation auf $M$ ist.
- Finden sie eine Äquivalenzrelation $\sim_2 \subseteq M \times M$ mit $\sim \subseteq \sim_2$, sodass $\sim_2$ minimale Anzahl an Elementen enthält.
- Wieviele verschiedene Äquivalenzklassen hat $\sim$?
- Geben Sie die Faktormenge van $A$ nach $\sim_2$ an.
- Geben Sie ein Repräsentantensystem von $A$ bezüglich $\sim_2$ an.

3.6 (Ordnungsrelationen)

Bestimmen Sie für

(a) $R_1 = \{(1,5),(2,4),(3,4),(5,2),(5,3),(6,5)\}$

(b) $R_2 = \{(2,5),(3,6),(4,2),(5,3),(6,1)\}$

(c) $R_3 = \{(1,4),(2,1),(3,2),(4,5),(5,6),(6,3)\}$

jeweils

- das kleinsten Element von $A$,
- das größte Element von $A$,
- die minimale Elemente von $A$,
- die maximale Elemente von $A$,
- die unteren Schranken von $B$,
- die oberen Schranken von $B$,
- das Infimum von $B$ in $A$ und
- das Supremum von $B$ in $A$

sofern diese existieren. Verwenden Sie dazu $A = \{1,2,\ldots,6\}$ und $B = \{2,3,4\}$

3.7 (Beweis zu Satz und Definition 1.3.32)

Beweisen sie Satz und Definition 1.3.32 aus dem Vorlesungsskript. Zu zeigen ist also dass für $\langle A_1, \leq_1 \rangle$, $\langle A_2, \leq_2 \rangle$ geordnete Mengen, die auf $A = A_1 \times A_2$ definierte Relation

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) :\Longleftrightarrow (a_1 <_1 b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq_2 b_2)) \tag{5}$$

eine Ordnungsrelation auf $A$ ist.