Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 08)
4. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 14. April 2008)

4.1 (Skalarprodukt auf Polynomen)
Quelle (vom 2008-04-06): `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/archiv/linalg2_ss04/la2z01.ps`

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Weiters seien $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ paarweise disjunkt. Untersuchen Sie für welche m, n

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \\ & (p, q) & \mapsto & \sum_{i=1}^m p(x_i)q(x_i) \end{array}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ ist.

4.2 (Skalarprodukt auf Polynomen—Fortsetzung)

- Für welche m bzw. n ist die in Beispiel 4.1 definierte Funktion ein Skalarprodukt, wenn man die Forderung nach der paarweisen Disjunktheit der x_i fallen läßt?
- Finden Sie orthogonale Elemente zu

$$p := x^2 - 1 \tag{1}$$

  für
  - $m = 4 \wedge n = 2$
  - $m = 5 \wedge n = 2$

  wobei

$$x_i := 2i - 3. \tag{2}$$

4.3 (Skalarprodukt auf Polynomen)
Quelle (vom 2008-04-06): `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/archiv/linalg2_ss04/la2z01.ps`

Sei V ein IP-Raum. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \|v + w\|^2 - \frac{1}{4} \|v - w\|^2$
- $\forall v, w \in V : \|v\| = \|w\| \iff (v - w) \perp (v + w)$

4.4 (Projektionen im Funktionenraum)

Wir betrachten den Raum $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ mit dem üblichen Skalarprodukt.

Sei V der von

$$f_1(x) := 4x^4 + 4x + 2 \tag{3}$$
$$f_2(x) := 2x^4 + 7 \tag{4}$$
$$f_3(x) := 2x^4 + 9 \tag{5}$$
$$f_4(x) := 2x^2 \tag{6}$$

erzeugte Unterraum. Projizieren Sie folgende Funktionen

$$f_5(x) := 2x^4 + 7 \tag{7}$$
$$f_6(x) := 2x^2 + 5 \tag{8}$$
$$f_7(x) := 2x + |x| \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

auf V parallel zu $V^\perp$.

4.5 (Projektionen im Funktionenraum–Fortsetzung)

Wir betrachten den Raum $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit dem üblichen Skalarprodukt.

Sei V wie in Beispiel 4.4. Projizieren Sie folgende Funktionen

$$f_8(x) := \left| x + \frac{1}{2} \right| \tag{11}$$
$$f_9(x) := -\frac{1}{23520} + \frac{1}{1470}\,x - \frac{1}{504}\,x^2 + \frac{1}{224}\,x^4 - \frac{1}{315}\,x^5 \tag{12}$$
$$f_{10}(x) := \sin(x) \tag{13}$$

auf V parallel zu $V^\perp$.

4.6 (Projektionen in $\mathbb{R}^3$)

Wir betrachten den Raum $V := \mathbb{R}^3$ mit dem üblichen Skalarprodukt. Sei

$$V_1 := \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = 0 \wedge v \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T = 0 \right\} \tag{14}$$

- Berechnen Sie $V_1^\perp$.
- Berechnen Sie eindimensionale $V_2, V_3, \ldots$, sodass $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \ldots$.
- Wenn $\pi_{1,2}$ die Projektion auf $V_1 \oplus V_2$ parallel zu V_3 ist und $\pi_{2,3}$ die Projektion auf $V_2 \oplus V_3$ parallel zu V_1 ist, finden Sie ein $v \in V$, sodaß $\pi_{1,2} \circ \pi_{2,3}(v) = v$ ist (sofern dies möglich ist).
- Falls Sie ein v zum obigen Punkt gefunden haben, wieso ist das kein Widerspruch zu 9.38.(ii)?

4.7 (Innere Produktisomorphismen)

Machen Sie durch Hinzpfügen geeigneter Skalarprodukte $\mathbb{R}^3$ und $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ zu inneren Produkträumen und finden Sie einen inneren Produktisomorphismus zwischen den inneren Produkträumen.

4.8 (Projektionen und triviale Funktionen)

Sei V ein beliebiger, aber fester Vektorraum.

Überprüfen Sie jeweils für

- $f := id$
- $f := 0$

- $f := -id$

ob f eine Projektion ist und berechnen Sie sowohl $\operatorname{im}(f)$ als auch $\operatorname{kern}(f)$. Falls f eine Projektion ist, versuchen Sie in Worten auszudrücken, was wohin projiziert wird.