auszuarbeiten bis 5. November

Aufgabe 4. 1. Gegeben seien die Menge A, sowie die Mengenfamilie $(B_i)_{i\in I}$. Beweisen Sie folgende Version der Gesetze von De Morgan:

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup_{i\in I} B_i &= \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i) \\ A \setminus \bigcap_{i\in I} B_i &= \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. 2. Die reellen Zahlen bilden einen *geordneter Körper*, das heißt, daß sie - wie die rationalen Zahlen auch - zusätzlich zu den algebraischen Operationen 'Addition' und 'Multiplikation' eine Ordnungsrelation besitzen, die mit diesen Operationen verträglich ist. Genauer gilt

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x + z \leq y + z \\ 0 \leq x \text{ und } 0 \leq y &\Rightarrow 0 \leq xy. \end{aligned}$$

Geben Sie ein Argument, das zeigt, daß die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper sein können.

Aufgabe 4. 3. Beweisen Sie, daß zyklische Gruppen immer abelsch sind.

Aufgabe 4. 4.

1. Zeigen Sie, daß die additiven Gruppen der Restklassenringe $(Z_n, +, \cdot)$ zyklische Gruppen sind.

2. Bestimmen Sie alle erzeugenden Elemente der Gruppen Z_7 und Z_8,

Aufgabe 4. 5. Man nennt eine Gruppe *endlich*, wenn sie endlich viele Elemente hat. Die Anzahl ihrer Elemente heißt *die Ordnung der Gruppe*.
Es sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie: Die Ordnung von H ist ein Teiler der Ordnung von G.

Aufgabe 4. 6. Es seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ Gruppen.

1. Zeigen Sie, daß durch die Festsetzung

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \circ_1 b_1, a_2 \circ_2 b_2)$$

   das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ zu einer Gruppe wird.

2. e_1 und e_2 bezeichnen die neutralen Elemente in G_1 bzw G_2. Zeigen Sie, daß $G_1 \times \{e_2\}$ und $\{e_1\} \times G_2$ jeweils normale Untergruppen von $G_1 \times G_2$ sind.

3. Beweisen Sie: $G_1 \cong G_1 \times \{e_2\}$ und $G_2 \cong \{e_1\} \times G_2$.

Aufgabe 4. 7. Gegeben sei ein Homomorphismus von Gruppen $\varphi\colon G \longrightarrow H$ sowie normale Untergruppen $M \leq G$ und $N \leq H$, so, daß $\varphi(M) \subseteq N$. Zeigen Sie, daß die Festsetzung $gM \mapsto \varphi(g)N$ einen Homomorphismus $G/M \longrightarrow H/N$ definiert.