Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 08)
5. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 21. April 2008)

5.1 (Orthogonalität von 1, sin und cos)

Sei V der IP-Raum $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ mit dem üblichen Skalarprodukt wie in Beispiel 9.31 aus dem Vorlesungsskript. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Menge

$$\{1, \sin(x), \sin(2x), \ldots, \cos(x), \cos(2x), \ldots\} \tag{1}$$

eine orthogonale Teilmenge von V ist.

5.2 (Orthogonormalisieren von 1, sin und cos)

Sei V der IP-Raum aus Beispiel 5.1. Orthonomalisieren Sie (1). Ist die Orthonormalisierung eindeutig?

5.3 (Zerlegung von Vektorräumen durch Projektionen)

Bestimmen Sie für folgende $V, n, p_1, \ldots, p_n$ ob man durch Anwendung von Satz 9.38 V als direkte Summe von $V_1, \ldots, V_n$ schreiben kann. Ist das möglich, so bestimmen Sie zusätzlich $V_1, \ldots, V_n$.

- $V = \mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R}), n = 2$

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\cos(x)+1}{2} & x \in [0,2\pi] \\ 1 & sonst \end{cases} \\ p_1: & V & \to & V \\ & g & \mapsto & hg \\ p_2: & V & \to & V \\ & g & \mapsto & (1-h)g \end{array}$$

- V, n, p_1, p_2 wie oben, jedoch

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & x \in [0,2\pi] \\ 1 & sonst \end{cases} \end{array}$$

- n, p_1, p_2, h wie oben, jedoch $V := \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

5.4 (Zerlegung von Vektorräumen durch Projektionen)

Sei X und D wie in Beispiel 9.33 im Skript, sodaß

$$\mathbb{R}^2 = X \oplus D. \tag{2}$$

Nach Satz 9.38 müssen den Unterräumen X und D zugehörige Projektionen p_X und p_D, existieren. Finden Sie solche Projektionen.

Zeigen Sie weiters, daß (2) nicht die einzige direkte Summe von einem Unterraum von $\mathbb{R}^2$ mit D ist, die $\mathbb{R}^2$ ist. Finden Sie also einen Unterraum Y von $\mathbb{R}^2$ mit $X \neq Y$ und zeigen Sie $\mathbb{R}^2 = Y \oplus D$.

5.5 (Normbedingungen)
Quelle (vom 2008-04-13): `http://www.math.uni-konstanz.de/~junk/teaching/analysis/tutorials/blatt1.ps`

Sei V ein reeller Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie, dass man Bedingung (3) aus Definition 9.25 durch die Bedingung

$$\{x \in V \mid \|x\| \leq 1\} \text{ ist konvex} \tag{3}$$

ersetzen kann.

Zu zeigen ist also, für einen beliebig aber festen reellen Vektorraum V und für eine Funktion $\|\cdot\|$, für die 9.25(1) und 9.25(2) gilt, folgende Aussage stimmt:

$$\{x \in V \mid \|x\| \leq 1\} \text{ ist konvex} \iff \forall x, y \in V \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \,. \tag{4}$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie die Beziehung

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} = \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{y}{\|y\|} \right\| \tag{5}$$

)

5.6 (Projektionen Matrizen und Spurskalarprodukt)
Quelle (vom 2008-04-13): `ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/LinAlg_II/WS99/u11.ps`

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 9.5 aus dem Vorlesungsskript. Weiters sei U der Unterraum der schiefsymmetrischen Matrizen von V, also

$$U := \left\{ A \in V \;\middle|\; A^T = -A \right\}. \tag{6}$$

Bestimmen Sie $U^\perp$.

5.7 (Projektionen, Matrizen und Spurskalarprodukt)

Seien n, V und U wie in Beispiel 5.6. Finden Sie Projektionen im Sinne von Satz 9.38 für die Zerlegung

$$V = U \oplus U^\perp, \tag{7}$$

sofern der Satz für die Zerlegung anwendbar ist.

5.8 (Idempotente Funktionen)

Untersuchen Sie ob folgende Funktionen für den jeweils angegebenen Vektorraum idempotent sind. Sofern die Funktion idempotent ist, untersuchen Sie, ob die Funktion eine Projektion im angegebenen Vektorraum ist. Die Unterräume der Projektion brauchen nicht explizit berechnet zu werden.

- $V = \mathbb{R}, \quad f_1 : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$
- $V = \mathbb{R}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$
- $V = \mathbb{R}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$
- $V = \mathbb{R}^2, \quad f_4 : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & (x, \frac{x}{2}) \end{array}$
- $V = \mathbb{R}^3, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{cases} (x, y, z) & z = 0 \\ (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$