auszuarbeiten bis 12. November

Aufgabe 5. 1. Es sei G eine Gruppe, und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Automorphismen von G. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Aut}(G)$ mit der Verknüpfung von Abbildungen

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

als Operation eine Gruppe bildet.

Aufgabe 5. 2. Es sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie: φ ist ein Monomorphismus genau dann, wenn $\ker(\varphi) = \{e_H\}$.

Aufgabe 5. 3. Es bezeiche $\mathbb{R}[[x]]$ die Menge aller formalen Potenzreihen in der Unbestimmten x. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}[[x]]$ mit den im Skriptum beschriebenen Operationen (Beispiel 1.5.28) ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Aufgabe 5. 4. Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{R}[[x]]$ keine Nullteiler hat.

Aufgabe 5. 5.

1. Bestimmen Sie die Einheiten (die Menge aller invertierbaren Elemente) von $\mathbb{R}[[x]]$, also die Menge aller $f \in \mathbb{R}[[x]]$, für die f^{-1} existiert.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{R}[[x]]$ das inverse Element von $1 - x$, also $(1 - x)^{-1}$.

Aufgabe 5. 6. Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix B so, daß $A \cdot B = 0_{3\times 3}$ gilt.

Aufgabe 5. 7. Zeigen Sie, daß die Menge aller quadratischen Matrizen $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ einen Ring mit Eins darstellt.