Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 08)
6. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 28. April 2008)

6.1 (Determinante orthogonaler Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix.

- Bestimmen Sie die Determinante von AA^T.
- Was können Sie aus der Determinante von AA^T für die Determinante von A ablesen?
- Stimmt diese Beobachtung auch für orthogonale Matrizen über $\mathbb{C}$?
- Stimmt diese Beobachtung auch für orthogonale Matrizen über einem beliebigen Ring?

6.2 (Gruppen orthogonaler Matrizen)

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die orthogonalen Matrizen aus $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Gruppe bilden können.

6.3 (Orthogonale 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$)

- Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen oder widerlegen Sie

$$(|A|)^2 = 1 \iff A \text{ ist orthogonal.} \tag{1}$$

- Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
- Bilden die orthogonalen Matrizen in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine *kommutative* Gruppe?

6.4 (Metrik induzierte Normen)
Quelle (vom 2008-04-15): `ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/Analysis2/SS06/uebungsblaetter/ss06_ueb03.ps`

Sei V ein metrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Bezeichne d die Metrik auf V. Zeigen oder widerlegen Sie:

Es gibt eine Norm, die die Metrik d induziert $\iff$ d ist translationsinvariant[1] $\wedge$ d ist homogen[2].

6.5 (Metriken)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die angegebenen Funktionen Metriken sind.

[1] Eine Metrik d auf V heißt translationsinvariant $:\iff \forall x, y, z \in V : d(x, y) = d(x + z, y + z)$.
[2] Eine Metrik d auf V heißt homogen $:\iff \forall x, y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$

- (diskrete Metrik) Sei V eine beliebige Menge.

$$\begin{aligned} d_1 : \quad V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- (verallgemeinerte Manhattan-Metrik) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}^n$ und $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $d_{(\mathbb{R},i)}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} d_2 : \quad V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n d_{(\mathbb{R},i)}(x_i, y_i)\,, \end{aligned}$$

  wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

6.6 (Metriken)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die angegebenen Funktionen Metriken sind.

- (Französische Eisenbahn-Metrik) Sei V ein beliebiger, metrischer Vektorraum mit Metrik d_M und sei $P \in V$.

$$\begin{aligned} d_3 : \quad V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} d_M(x,y) & \exists \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda\,(y - x) = P \\ d_M(x,P) + d_M(P,y) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- Sei $V = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} d_4 : \quad V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \frac{1}{|x|+|y|} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

6.7 (Äquivalenzaussage zu orthogonalen Homomorphismen)

Zeigen oder widerlegen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:

$$9.49(\text{iii}) \implies 9.49(\text{i}) \tag{2}$$

$$9.49(\text{iii}) \implies 9.49(\text{ii}) \tag{3}$$

(*Hinweis:* Die Lösung zu (3) ist kurz.)

(*Hinweis:* Verwenden Sie, dass Sie $\langle u, v \rangle$ für eine geeignete Matrix A als $u^T A v$ schreiben können.)

(*Hinweis:* Wie sieht so eine Matrix A aus, wenn Sie u und v bzgl. einer Orthonormalbasis anschreiben?)

(*Hinweis:* Verwenden Sie $h(u)_B = \mathcal{A}_{h;B,B} u_B$)

(*Hinweis:* Schreiben Sie das Skalarprodukt von $h(u)$ mit $h(v)$ an und vereinfachen Sie, indem Sie obige Hinweise anwenden.)

6.8 (Äquivalenzaussage zu orthogonalen Homomorphismen)

Zeigen oder widerlegen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:

$$9.49(\text{i}) \implies 9.49(\text{iii}) \tag{4}$$

$$9.49(\text{ii}) \implies 9.49(\text{iii}) \tag{5}$$

(*Hinweis:* Die Lösung zu (5) ist kurz.)

(*Hinweis:* Lesen Sie die Hinweise zu Beispiel 6.7.)

(*Hinweis:* Vereinfachen Sie jeweils $\langle h(u), h(v)\rangle$ und $\langle u, v\rangle$ und vergleichen Sie die Resultate.)

(*Hinweis:* Schließen Sie aus $uAv = uBv$, dass $A = B$ indem Sie ausnützen, welche Werte u und v annehmen.)