Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 6

Auszuarbeiten bis 19. November

Aufgabe 6.1. Finden Sie eine Funktion $f : A \to A$, sodass für $1 \leq i < 5$ die Ungleichheit $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i\times} \neq \mathrm{id}_A$ gilt und für $i = 5$ die Gleichheit $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{5\times} = \mathrm{id}_A$ gilt.

Aufgabe 6.2. Es seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv.

(b) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv.

(c) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

(d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv.

(e) Es kann sein, dass $g \circ f$ bijektiv ist, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Aufgabe 6.3. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen gleichmächtig sind, indem Sie eine Bijektion angeben.

(a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) $\mathbb{Z} \times [0, 2[$ und $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6.4. Zeigen Sie, dass $[0, 1[\times[0, 1[$ und $[0, 1[$ gleichmächtig sind. Hinweis: Verwenden Sie den Cantor-Schröder-Bernstein Satz.

Aufgabe 6.5. Geben Sie alle Unterhalbgruppen von $(\mathbb{Z}_5, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, +)$ an. Welche dieser Unterhalbgruppen sind Gruppen?

Aufgabe 6.6. Geben Sie alle Unterhalbgruppen von $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ an[1]. Welche dieser Unterhalbgruppen sind Gruppen?

Aufgabe 6.7. Betrachten Sie die Verknüpfungsstruktur $A := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{und} \qquad (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1\, y_1, x_2\, y_2).$$

Begründen Sie ausführlich ihre Antwort:

(a) Ist A ein kommutativer Ring?

(b) Gibt es ein Einselement?

(c) Ist A ein Körper?

Aufgabe 6.8. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ und $\lambda, \mu \in R$. Zeigen Sie:

(a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(b) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

(c) $(-1)A = -A$.

Aufgabe 6.9. Seien $\lambda \in R$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ und $B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$. Zeigen Sie:

(a) $A(B + C) = AC + BC$.

(b) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

[1] Die Multiplikation $\cdot$ ist in Beispiel 1.5.27 des Vorlesungsskriptums definiert.