auszuarbeiten bis 12. Mai

Aufgabe 7. 1. Gegeben sei die Bilinearform

$$f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_3$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Basis

$$B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (0,1,0)\}$$

1. mit Hilfe von Satz 10.14;
2. direkt.

Aufgabe 7. 2. Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,x_2) \mapsto 2x_1 - 3x_2 \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (y_1,y_2,y_3) \mapsto y_1 + 2y_2 - y_3$$

sowie die Basen $B = \{(1,1), (-1,1)\}$ und $C = \{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$ von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Es mögen $B^\star, C^\star$ die dualen Basen zu B, C bezeichnen. Berechnen Sie die Darstellung der Bilinearform $f \otimes g$ als Linearkombination in der Basis

$$\{\beta \otimes \gamma \mid \beta \in B^\star \wedge \gamma \in C^\star\}.$$

Aufgabe 7. 3. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ so, daß P^TAP eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 7. 4. Es sei $\dim_K V = n < \infty$, $f\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, $v \in V$ ein Vektor mit $f(v,v) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$V = \mathrm{span}(v) \oplus \{v\}^\perp$$

wobei das orthogonale Komplement von $S \subseteq V$ bezüglich f gegeben ist als

$$S^\perp = \{x \in V \mid f(x,s) = 0\ \forall s \in S\}.$$

Aufgabe 7. 5. Es sei $\dim_K V = n < \infty$ mit $1 + 1 \neq 0$ in K. Es bezeichne

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(V) &= \{f\colon V \times V \longrightarrow K \mid f \text{ bilinear}\} \\ \mathrm{Sym}(V) &= \{f \in \mathrm{Bil}(V) \mid f(x,y) = f(y,x)\ \forall x,y \in V\} \\ \mathrm{Alt}(V) &= \{f \in \mathrm{Bil}(V) \mid f(x,y) = -f(y,x)\ \forall x,y \in V\} \end{aligned}$$

und K^V den K-Vektorraum aller Abbildungen $V \longrightarrow K$. Zeigen Sie:

1. $Q(f)(v) = f(v,v)$ definiert eine lineare Abbildung $Q\colon \mathrm{Bil}(V) \longrightarrow K^V$.
2. Das Bild von Q, $\mathrm{im}(Q)$ ist der Raum der quadratischen Formen $\mathrm{Q}(V)$.
3. Für den Kern von Q gilt $\ker Q = \mathrm{Alt}(V)$.

4. $\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Sym}(V) \oplus \mathrm{Alt}(V)$.
5. $F(q)(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ definiert eine lineare Abbildung $F\colon \mathrm{Q}(V) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V)$ mit $\mathrm{im}(F) = \mathrm{Sym}(V)$, die rechtsinvers zu Q ist.

Aufgabe 7. 6. Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, und $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T A y$ die zugehörige symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, daß es reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$ gibt, so, daß

$$\alpha ||x|| \leq \sqrt{f(x,x)} \leq \beta ||x|| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt, wobei $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Aufgabe 7. 7. Es sei $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f\colon S_3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 - 2xy - y^2 + z^2.$$