Lineare Algebra WS 2006

Übungsblatt 7

Auszuarbeiten bis 26. November

Aufgabe 6.1. Finden Sie Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:
(a) $A \neq 0$ und $A^2 = 0$.
(b) $A^2 \neq 0$ und $A^3 = 0$.

Aufgabe 6.2. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne A^n, B^n und $(AB)^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Ergebnisse.

Aufgabe 6.3. Berechnen Sie eine reduzierte Zeilenstaffelform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & -12 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie den Zeilenrang von A und den Lösungsraum für das Gleichungssystem $Ax = 0$.

Aufgabe 6.4. Finden Sie, falls möglich, für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ eine Matrix B, sodass $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.5. Finden Sie alle Primzahlen a, b, c, d, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{array}{lll} a & +b & = c \\ 2a & +b & = d. \end{array}$$

Aufgabe 6.6. Bestimmen Sie, falls möglich, $\alpha \in \mathbb{Q}$ jeweils so, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} a & -b & +c & = 1 \\ 2a & -\alpha b & -\alpha c & = 0 \\ -2a & +\alpha b & & = 0 \end{array}$$

über den Körper $\mathbb{Q}$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, bzw. unendlich viele Loesungen hat.

Aufgabe 6.7. Betrachten Sie die linear unabhängigen Vektoren

$$S = \{(1,0,0,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,0,0,0)\}.$$

Finden Sie 2 weitere Vektoren so dass Sie insgesamt 5 linear unabhängig Vektoren erhalten. Kann man zusätzliche linear unabhängige Vektoren konstruieren?

Aufgabe 6.8. Seien $\{(1,4,3,2), (1,4,4,0), (6,3,1,4)\}$ Vektoren über $\mathbb{K}$. Enscheiden Sie, ob diese linear abhängig sind wenn $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder wenn[1] $\mathbb{K} = \mathbb{Z}^7$. Wenn ja, geben Sie eine jeweilige Linearkombination an.

Aufgabe 6.9. Gegeben Sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -50 & 3 & 2 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 21 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -6 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 5 & 10 \\ 15 & -10 & 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & -10 & 0 & 0 & 16 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -45 \\ 935 \\ -192 \\ -179 \\ 137 \\ -112 \\ 43 \\ -386 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge. (Ein Computeralgebrasystem ist erlaubt und erwünscht!).

[1] Man beachte dass $\mathbb{Z}_7$ mit den Operationen von Beispiel 1.5.27 ein Körper ist.