auszuarbeiten bis 26. Mai 2008

Aufgabe 8. 1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie das Minimalpolynom der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/3 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. 2. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim V = n$, und $h\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Operator mit Minimalpolynom m_h. Zeigen Sie:

1. $\deg m_h = n$ genau dann, wenn $\exists v \in V$ sodaß $V = \operatorname{span}\{h^r(v) \mid r \in \mathbb{N}\}$.
2. $\deg m_h = n$ und m_h ist Potenz eines irreduziblen Polynoms genau dann, wenn V nicht darstellbar ist als direkte Summe h-invarianter Teilräume positiver Dimension.

Aufgabe 8. 3. Es sei V der-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen, und $P \in V$ die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung $h\colon V \longrightarrow V$, $h(A) = PA$ bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. 4. Es sei V ein Vektorraum über K, $T\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Operator. Weiters $g, h \in K[x]$ teilerfremde Polynome und $f = gh$. Zeigen Sie

$$\ker(f(T)) = \ker(g(T)) \oplus \ker(h(T)).$$

Aufgabe 8. 5. Berechnen Sie eine Blockdiagonalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -7 & 3 & 3 \\ 22 & -18 & 22 & 2 \\ 33 & -27 & 3 & 23 \\ 42 & -18 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. 6. Sei V ein komplexer Vektorraum, $T\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Operator, $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

> $\mu \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von T^r genau dann, wenn es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von T gibt mit $\lambda^r = \mu$.