Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 3.12.2007

8.1 Sei M = { (1,0,2), (2,1,1), (5,2,0), (2,0,4) } $\subseteq \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle linear unabhängigen Teilmengen von *M*. „Nebenrechnungen“ dürfen Sie mit einem CAS durchführen.

8.2 Beweisen Sie Satz 3.36 aus dem Skript.

8.3 Lösen Sie folgende Gleichungssysteme durch Reduktion auf die Hermite-Form:

(a) (über $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) (über $\mathbb{Z}_3$)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.4 Wie 8.3. Ein CAS ist empfohlen!

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 5 & 0 & 7 & 4 & 56 & 7 & -1 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 8 & 9 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 11 & 47 & -2 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 6 & 77 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.5 Interpretieren Sie geometrisch :
(a) Ein SLG aus drei Gleichungen in drei Variablen hat zwei frei wählbare Parameter.
(b) Ein SLG aus drei Gleichungen in drei Variablen hat einen frei wählbaren Parameter.
(c) Ein SLG aus drei Gleichungen in drei Variablen ist eindeutig lösbar.
(d) Ein SLG aus drei Gleichungen in drei Variablen ist unlösbar.
(e) Ein SLG aus zwei Gleichungen in zwei Variablen hat einen frei wählbaren Parameter.
(f) Ein SLG aus zwei Gleichungen in zwei Variablen ist eindeutig lösbar.
(g) Ein SLG aus zwei Gleichungen in zwei Variablen ist eindeutig lösbar.

8.6 (a) Gegeben seien die Geraden :
g: $x + 2y = 1$ und h: $2x + 4y = 4$
Berechnen Sie **im projektiven Raum** die Schnittmenge der beiden Geraden.
Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch interpretieren?
(b) Wie (a) für g: $x + y = 3$ und h: $2x - y = 0$

8.7 Zeigen Sie :
Seien g : $ax + by = c$ und h : $dx + ey = f$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$.
und sei $(v_1, v_2, v_3) = (a,b, -c) \times (d,e, -f)$
(“x” bezeichne das gewöhnliche Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$).
Dann gilt :
Ist $v_3 = 0$, so sind die Geraden parallel mit Richtungsvektor (v_1,v_2)
Ist $v_3 \neq 0$, so ist der Schnittpunkt gegeben durch $(v_1/v_3, v_2/v_3)$

8.8 Lösen Sie Übung 8.6 mit Hilfe der Methode aus 8.7.