auszuarbeiten bis 2. Juni 2008

Aufgabe 9. 1. Sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$, $T\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Endomorphismus, $\lambda \in K$ ein Eigenwert von T mit algebraischer Vielfachheit d. Zeigen Sie, daß $\dim(T - \lambda\mathrm{id})(V) \geq n - d$ ist.

Aufgabe 9. 2. Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Aufgabe 9. 3. Sei A die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix U so, daß $U^T AU$ Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 9. 4. Sei $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein monisches Polynom aus $K[x]$. Bestimmen Sie einen linearen Operator T auf einem n-dimensionalen Vektorraum über K, dessen charakteristisches Polynom f ist.

Aufgabe 9. 5. Sei V der komplexe Vektorraum der Lösungen des Differentialoperators $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$, $D\colon V \longrightarrow V$, $D(f) = \frac{d}{dt}(f)$, mit Minimalpolynom $m_D = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_k)^{e_k}$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{\exp(\alpha_i t), t\exp(\alpha_i t), \ldots, t^{e_i - 1}\exp(\alpha_i t)\}$$

eine Basis von V ist.

Aufgabe 9. 6. Lösen Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -8 \\ -3 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$