Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1, WS 07/08
9. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 10.12.2007

9.1 Invertieren Sie, falls möglich, folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Methode der Elementarumformungen aus dem Skript.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

9.2 Bestimmen Sie für allgemeines a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ die Inverse von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$. Welche Einschränkungen an a, b, c, d müssen getroffen werden?

9.3 Lösen Sie Beispiel 9.1 (a) über $\mathbb{Z}_2$ (b) über $\mathbb{Z}_5$. Was fällt auf?

9.4 Zeigen Sie das Korollar aus dem Skript :
Für $m \in \mathbb{N}$ und reguläre Matrizen A gilt : $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

9.5 Sei M eine beliebige aber feste Menge. Ist V = (P(M), Δ) über $\mathbb{Z}_2$ mit der Skalarmultiplikation [1]·A = A und [0]·A = {} ein Vektorraum? Geben Sie in jedem Fall an, welche VR-Axiome erfüllt sind.

9.6 Ist V = { a + b $\sqrt{3}$, | a, b $\in \mathbb{Q}$ } mit der „gewöhnlichen“ Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Wie sieht es über $\mathbb{R}$ aus?

9.7 Zeigen Sie : In einem Vektorraum V über einem Körper K gilt für a, b, c $\in$ V :
(a) a + c = b + c $\Rightarrow$ a = b
(b) Jedes a in V hat **genau ein** inverses Element.
(Achtung! Nichttrivial! Geben Sie bei jedem Beweisschritt den verwendeten Satz an.)

9.8 Zeigen Sie : In einem Vektorraum V über einem Körper K gilt für a $\in$ V und λ $\in$ K :
(a) –(–a) = a
(b) (–λ)(–a) = λa
(Achtung! Nichttrivial! Geben Sie bei jedem Beweisschritt den verwendeten Satz an.)