# Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2, SS 08
# 10. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 9.6.2008

10.1 Zeigen Sie : Die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ ist konvex.

10.2 Wir verallgemeinern Bsp. 10.1.: Sei K eine offene n-dimensionale Hyperkugel mit Mittelpunkt a und Radius r der Gestalt $K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r, r \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie : K ist konvex.

10.3 Seien A,B konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ , $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie :
(a) $A+B := \{ a+b \mid a \in A, b \in B \}$ ist konvex.
(b) $x+A := \{ x+a \mid a \in A \}$ ist konvex.
(c) $\lambda A := \{ \lambda a \mid a \in A \}$ ist konvex.

10.4 Zeigen Sie : Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda, \mu \geq 0$ und K eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ , dann gilt :
$(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$.

10.5 Zeigen Sie : Seien $x_1, \dots , x_n \in K$ und K eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, seien, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, dann gilt :
$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in K$.
(Hinweis : Induktion)

10.6 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren K(M) als den Durchschnitt aller konvexen Obermengen von M. Zeigen Sie : K(M) ist die Vereinigung aller $KH(P_1,\dots,P_k)$ mit $P_1,\dots,P_k \in M$.

10.7 (a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie : Die Strecke (im Sinne unserer Anschauung) AB ist gleich KH(A,B).
(b) Wie (a) für ein „ausgefülltes“ Dreieck $ABC \in \mathbb{R}^n$ (im Sinne unserer Anschauung, also für alle Punkte auf bzw. innerhalb der Verbindungslinien der Eckpunkte.)