Lineare Algebra und Analytische Geometrie (WS 07/08)
10. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 7. Jänner 2008)

10.1 (Vektorraum)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/baur/ws05/lainf/Blatt5.pdf`

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $V := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ mit $\oplus$ als Addition und $\odot$ als Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet, wobei

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (\lambda, v) & \mapsto & v^\lambda \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & V \times V & \to & V \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 v_2 \end{array}$$

10.2 (Endlicher Vektorraum)
Quelle (vom 2007-12-08): `http://www.uni-siegen.de/fb6/wir/personen/gimbel/lineare_algebra_i_ws2007_2008/uebung2.pdf`

Wir betrachten $V = \mathbb{Z}_3^2$ als Vektorraum über $K = \mathbb{Z}_3$, wobei wir die komponentenweise Addition (bzw. Multiplikation) als Addition (bzw. Skalarmultiplikation) im Vektorraum verwenden.

- Wieviele Punkte enthält V?
- Wieviele Punkte enthält eine nicht-degenerierte Gerade[1] in V?
- Wieviele verschiedene, nicht-degenerierte Geraden enthält V?
- Geben sie alle nicht-degenerierten Geraden in V explizit an.

10.3 (Polynomsvektorräume)

Sei K ein Körper. Wir betrachten $V = \mathrm{Pol}_3(K)$ als Vektorraum über K, wobei wir die üblichen Operationen verwenden.

Weiters seien

$$A := \left\{x^2 + 3x, x^2 + 2, x + 1\right\}, \tag{2}$$
$$B := \left\{x^2 - x, x^2 + 1, x + 1\right\} \text{ und} \tag{3}$$
$$C := \left\{x^2 + x, x + 1, 1\right\}. \tag{4}$$

Überprüfen Sie jeweils für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_5$ welche der drei Mengen A, B und C linear abhängig bzw. linear unabhängig sind. Finden Sie für die linear abhängigen Mengen eine nicht-triviale Linearkombinaton, die 0 ergibt.

[1] Eine Untermenge U von V heißt genau dann *nicht-degenerierte Gerade in* V, wenn $v_1, v_2 \in V$ existieren, sodaß $v_1 \neq v_2$ und

$$U = \{u \in V \mid \exists \lambda \in K : u = v_1 + \lambda v_2\}. \tag{1}$$

10.4 (Teilvektorrräume)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/7LAI.pdf`

V ist ein Vektorraum über K mit den üblichen Operationen. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, daß W ein Teilvektorraum von V ist.

- $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\}$
- $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
- $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$

10.5 (Teilvektorräume)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/7LAI.pdf`

V ist ein Vektorraum über K mit den üblichen Operationen. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, daß W ein Teilvektorraum von V ist.

- $V = \mathrm{Fun}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{f \in \mathrm{Fun}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$
- $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2\}$
- $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$, $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, mit $n \in \mathbb{N}^+$

10.6 (Vereinigung von Teilvektorräumen)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/7LAI.pdf`

Sei K ein Körper und W ein Vektorraum über K. Weiters seien U und V Teilvektorräume von W. Zeigen oder widerlegen Sie:

$U \cup V$ ist ein Teilvektorraum von W genau dann, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

10.7 (Lineare Unabhängigkeit)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/7LAI.pdf`

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiters sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n$ n linear unabhängige Vektoren aus V. Zusätzlich sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ und $w := \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_2 v_2$.

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\{v_1 - w, \ldots, v_n - w\} \text{ ist linear abhängig} \implies \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \tag{5}$$

10.8 (Lineare Unabhängigkeit)
Quelle (vom 2007-12-05): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/7LAI.pdf`

Sei die Angabe wie in Beispiel 10.7.

Zeigen oder widerlegen Sie jedoch diesmal:

$$\{v_1 - w, \ldots, v_n - w\} \text{ ist linear abhängig} \impliedby \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \tag{6}$$