Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 08)
11. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 16. Juni 2008)

11.1 (Konvexe Hülle und Extrempunkte)

Sei $M := Q \cup K$ wobei

$$Q := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \in [-1, 0] \wedge x_2 \in [0, 1] \right\}, \text{und} \tag{1}$$

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - (1,1)\| \leq 1 \right\}. \tag{2}$$

Bestimmen Sie

- $KH(M)$.
- die Extrempunkte von $KH(M)$.

11.2 (Rand und unterstützende Halbebenen)

Sei M wie in Beispiel 11.1.

Bestimmen Sie

- den Rand von $KH(M)$.
- alle unterstützenden Hyperebenen von $KH(M)$.

11.3 (Aussagen zu konvexen Mengen)

- Sei S eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie: Zu jedem Punkt auf dem Rand von S gibt es genau eine unterstützende Hyperebene.
- Sei A eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen oder widerlegen Sie: Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist konvex.

11.4 (Algorithmus zur Bestimmung ob Punkt im Polygon liegt)

Sei S eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und E die Menge der Extrempunkte von S.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für endliches E bestimmt, ob ein Punkt P aus $\mathbb{R}^n$ in S enthalten ist oder nicht.

(*Hinweis:* Sie brauchen den Algorithmus nur zu entwerfen und nicht etwa in einer Programmiersprache zu implementieren; Pseudocode oder ähnliches genügt.)

(*Hinweis:* Verwenden Sie unterstützende Halbebenen.)

11.5 (Isomorphismus von Polynomringen)

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$R[x_1][x_2] \cong R[x_1, x_2] \tag{3}$$

11.6 (Polynomringbegriffe)

Bestimmen Sie soweit möglich jeweils

- den führenden Koeffizienten,
- den Koeffizienten von x_1^2,
- den Koeffizienten von x_1,
- den Koeffizienten von x_1x_2,
- den Grad bzgl. x_1,
- den Grad bzgl. x_2, und
- den totalen Grad

von

- 0 in $R[x_1]$,
- 1 in $R[x_1]$,
- $7x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^3x_2 + 5x_1x_2^8$ in $R[x_1][x_2]$,
- $7x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^3x_2 + 5x_1x_2^8$ in $R[x_2][x_1]$,
- $7x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^3x_2 + 5x_1x_2^8$ in $R[x_1, x_2]$, und
- $7x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^3x_2 + 5x_1x_2^8$ in $R[x_2, x_1]$.

11.7 (Jordan-Block-Matrizen)

Sei A folgende 6×6 Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Sei f die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, die A als Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis hat. Bestimmen Sie

- eine Basis B, in der die Darstellungsmatrix zu f eine Jordan-Blockdiagonalmatrix ist.
- die Darstellungsmatrix J_f von f bezüglich B.

11.8 (Potenzen von Jordan-Block-Matrizen)

Sei J eine elementare $m \times m$ Jordan-Matrix. Also

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{5}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-(m-1)} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-(m-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{6}$$

11.9 (Potenzen von Jordan-Block-Matrizen)

Seien A, f, J_f wie in Beispiel 11.7.

Berechnen Sie

- J_f^4 über die Darstellung aus Beispiel 11.8.
- A^4 über das Ergebnis von J_f^4.